إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ١٢ من أصل ١٥ محاضرة

طريقة فصل المتغيرات ((Separation Of Variables Methods))

تتلخص الطريقة بفرض الحل على شكل حاصل ضرب دالتين مفصولتين و حسب المتغيرات التي تعتمد عليها الدالة المجهولة في المعادلة ثم تعويض الحل المفروض بحدود المعادلة المطلوب حلها بعدها نحصل على معادلتين إعتياديتين يتم حلها و تعويض الحل بالحل المفروض للحصول على الحل العام للمعادلة و بتطبيق الشروط نحصل على الحل الخاص .

مثال ١ : حل المعادلة : $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}}$., $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 4\,e^{-3x}$.

$Let\ \ U(x,y) = X(x).Y(y)\ \ ,\ \rightarrow\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{X'Y}.,\ \ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{XY'}\ .$

بعد فرض الحل و إشتقاقه نعوض في المعادلة الأصلية ثم نفصل المتغيرات :

$[\,X'Y + XY = \ XY'.\,] \div \ XY. \quad \rightarrow \quad \frac{X'}{X} + 1 = \frac{Y'}{Y}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$

لتكون المعادلة (1) صحيحة يجب أن يساوي كل من طرفيها لثابت واحد و ليكن **a** وهذا يعطينا المعادلتين الإعتياديتين :

$\frac{X'}{X} + 1 = a.\ldots\ldots\ldots.\ (2). \qquad , \qquad \frac{Y'}{Y} = a\,.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$

$(2)\ \rightarrow\ \ X' + (\,1-a\,)\,X = 0.\ \ \rightarrow\ \big(m + (1-a)\big) = 0.\ \ \big((\text{ caractarestic equation })\big).$

$\rightarrow\ \ m = a - 1\,.\ \ \rightarrow X(x) = c1\ \ \mathbf{e}^{(\mathbf{a-1})\,\mathbf{x}}\quad .$

$(3)\ \rightarrow\ \ Y' - a\,Y = 0.\ \ \rightarrow\ \ (m-a) = 0.\ \ \big((\text{ caractarestic equation })\big).$

$\rightarrow\ \ m = a\,.\ \ \rightarrow Y(y) = c2\ \ \mathbf{e}^{\mathbf{a}\,\mathbf{y}}$

$Since\ U(x,t) = X(x).T(t) \rightarrow U(x,y) = c1\ \ \mathbf{e}^{(\mathbf{a-1})\,\mathbf{x}}.\,c2\ \ \mathbf{e}^{\mathbf{a}\,\mathbf{y}},$

$\rightarrow\ U(x,y) = c\ \ \mathbf{e}^{(\mathbf{a-1})\,\mathbf{x}+ay.}\ .,(\,c1.c2 = c\,).$

$\rightarrow\ U(x,0) = c\ \ \mathbf{e}^{(\mathbf{a-1})\,\mathbf{x}.} = \ 4\,e^{-3x}\ .\ \ \rightarrow\ \ c = 4\ .,\qquad a - 1 = -3\ .,\ \rightarrow \boldsymbol{a = -2}\ .$

$\rightarrow\ \boldsymbol{U(x,y) = 4\ \ e^{-3\,x - 2y.}}\quad .$

مثال ٢ : حل المعادلة : $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}^2}$., $U(0,t) = 0.,$ $U(10,t) = 0.,$ $U(x,0) = \mathbf{50}\sin\frac{\mathbf{3\pi x}}{\mathbf{2}}$.

$\text{Let}\ \ U(x,t) = X(x).T(t)\ \ ,\ \rightarrow\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{T'Y}.,\quad \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{X''T}\ .$

بعد فرض الحل و إشتقاقه نعوض في المعادلة الأصلية ثم نفصل المتغيرات :

$[\,T'X\ = \ \mathbf{X''T}.\,] \div \ XT. \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{X''}}{X} = \frac{T'}{T}\ .\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$

لتكون المعادلة (1) صحيحة يجب أن يساوي كل من طرفيها لثابت واحد و ليكن **a** وهذا يعطينا المعادلتين الإعتياديتين :

$$\mathbf{X}'' = aX \ldots\ldots\ldots\ldots (2)., \qquad \mathrm{T}' = aT \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

الثابت **a** يأخذ ثلاث إحتمالات و هي :

١- $\underline{(a < 0)}$ للسهولة نضع $(a = -ʎ^2)$:

$$(2) \rightarrow \mathrm{X}'' + ʎ^2 X = 0. \rightarrow (\mathrm{m}^2 + ʎ^2) = 0. \quad ((\text{caractarestic equation})).$$

$$\rightarrow \mathrm{m}^2 = -ʎ^2., \rightarrow \mathrm{m} = \mp ʎi., \rightarrow \mathrm{X(x)} = \mathrm{A1}\,\mathbf{cos}\,ʎ\,\mathrm{x} + \mathrm{A2}\sin ʎ\,\mathrm{x}.$$

$$(3) \rightarrow \mathrm{T}' + ʎ^2 T = 0. \rightarrow m = -ʎ^2., \rightarrow \mathrm{T(t)} = \mathrm{c1}\,\mathrm{e}^{-ʎ^2 t}.$$

$Since\ \mathrm{U(x,t)} = \mathrm{X(x).T(t)}$,

$$\rightarrow \mathrm{U(x,t)} = \mathrm{e}^{-ʎ^2 t}\{\mathrm{A}\,\mathbf{cos}\,ʎ\,\mathrm{x} + \mathrm{B}\sin ʎ\,\mathrm{x}\}.(\text{General Solution}).$$

حيث إن (B = C1A1 , A = C2A2) وللحصول على الحل الخاص نستخدم شروط المعادلة ، من الشرط الأول نحصل :

$$\rightarrow \mathrm{U(0,t)} = \mathrm{e}^{-ʎ^2 t}\mathrm{A} = 0., \rightarrow \mathrm{A} = 0., \rightarrow \mathrm{U(x,t)} = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-ʎ^2 t}\sin ʎ\,\mathrm{x}.$$

هنا وضعت $(\mathrm{A} = 0)$ لأنه $(\mathrm{e}^{-ʎ^2 t})$ لا يمكن أن تساوي صفر لكون الحل سيكون صفر و هذا غير ممكن و ذلك لسبب عدم تحقيقه للمعادلة و كافة شروطها في هذه الحالة .

و بتطبيق الشرط الثاني نحصل على :

$$\rightarrow \mathrm{U(10,t)} = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-ʎ^2 t}\sin \mathbf{10}ʎ = 0. \rightarrow \sin \mathbf{10}ʎ = 0.\ldots\ldots\ldots(4).$$

هنا وضعت $(\sin \mathbf{10}ʎ = 0)$ لأنه $(\mathrm{B}\ \mathrm{e}^{-ʎ^2 t})$ لا يمكن أن تساوي لنفس السبب السابق أعلاه .

$$(4) \rightarrow 10\,ʎ = m\boldsymbol{\pi}. \rightarrow ʎ = \frac{m\boldsymbol{\pi}}{10}., \qquad m = \pm 1\ \pm 2\ \pm 3\ \pm \cdots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rightarrow \mathrm{U(x,t)} = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{100}\right)t}\sin\frac{m\boldsymbol{\pi}}{10}\mathrm{x}.$$

و بتطبيق الشرط الثالث نحصل على :

$$\rightarrow \mathrm{U}(x,0) = \mathrm{B}\sin\frac{m\boldsymbol{\pi}}{10}\mathrm{x} = \mathbf{50}\sin\frac{\mathbf{3\pi x}}{\mathbf{2}}. \rightarrow \mathrm{B} = 50., \quad m = 15.$$

$$\rightarrow \mathrm{U(x,t)} = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{225\,\pi^2}{100}\right)t}\sin\frac{3\boldsymbol{\pi}}{2}\mathrm{x}.$$

٢- $\underline{(\mathbf{a = 0})}$ عندئذ يكون :

$$(2) \rightarrow \mathrm{X}'' = 0. \rightarrow \mathrm{m}^2 = 0. \quad ((\text{caractarestic equation})). \rightarrow X(x) = A1x + A2.$$

$$(3) \rightarrow T = 0. \rightarrow m = 0., \rightarrow \mathrm{T(t)} = \mathrm{c1}.$$

$$Since\ \mathrm{U(x,t)} = \mathrm{X(x).T(t)}. \rightarrow \mathrm{U(x,t)} = Ax + B.\ Such\ that\ (\mathrm{B} = \mathrm{C1A1}, \mathrm{A} = \mathrm{C2A2}).$$

من الشرط الأول نحصل : $U(0,t) = B = 0. \quad \rightarrow \quad U(x,t) = Ax$.

و من الشرط الثاني نحصل : $U(10,t) = 10A = 0. \quad \rightarrow \quad A = 0$.

هذا معناه ($U(x,t) = 0$) و بهذا لا يقبل الحل عند هذه الحالة .

٣- ($a > 0$) للسهولة نضع $(a = ג^2)$:

$(2) \rightarrow X'' - ג^2 X = 0. \rightarrow m^2 - ג^2 = 0.$ ((caractarestic equation)) .

$\rightarrow m^2 = ג^2. \rightarrow m = \pm 1., \quad \rightarrow X(x) = A1\, e^{גx} + A2\, e^{-גx}$.

$(3) \rightarrow T' - ג^2 T = 0. \rightarrow m^2 - ג^2 = 0. \rightarrow m^2 = ג^2., \quad \rightarrow T(t) = c1 e^{ג^2 t}$.

Since $\mathbf{U(x,t) = X(x).T(t)}. \rightarrow \mathbf{U(x,t)} = e^{ג^2 t}\left\{A\, e^{גx} + B\, e^{-גx}\right\}$, ***Such that*** (B = C1A1 , A = C2A2).

من الشرط الأول نحصل :

$U(0,t) = e^{ג^2 t}\{A + B\} = 0. \quad \rightarrow \quad \{A + B\} = 0 \ldots\ldots\ldots.(*)$.

و من الشرط الثاني نحصل :

$U(10,t) = e^{ג^2 t}\left\{A\, e^{10ג} + B\, e^{-10ג}\right\} = 0. \rightarrow \left\{A\, e^{10ג} + B\, e^{-10ג}\right\} = 0 \ldots..(**)$.

من العلاقتين $(*), (**)$ نستنتج بأن ($U(x,t) = 0$) و بهذا لا يقبل الحل عند هذه الحالة .

لذا فإن الإحتمال الوحيد للحصول على حل يحقق المعادلة و كافة شروطها هو الإحتمال الأول ($a < 0$) .

تمارين ((إستخدم طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلات الآتية)) :

1	$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$., $U(0,y) = e^{2y}$.
2	$\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$., $U(0,t) = 0.$, $U(\pi,t) = 0.$, $U(x,0) = 4\sin 2x$.
3	$\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U$., $U(0,t) = 0.$, $U(10,t) = 0.$, $U(x,0) = 8\sin 3\pi x$.
4	$\dfrac{\partial U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$., $U(0,t) = 0.$, $U(10,t) = 0.$, $U_t(x,0) = 0$. , $U(x,0) = 3\sin 2\pi x$.
5	$\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$., $U(0,t) = 0.$, $U(10,t) = 0.$, $U(x,0) = x$.