إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ١٣ من أصل ١٥ محاضرة

متسلسلة فوريية (Fourier Series)

و هي عبارة عن متسلسلة مثلثية تستخدم للتعبير عن أي دالة (لنشر أي دالة) بدوال مثلثية و التي كثير ما نحتاجها للتعبير عن الحركات الموجية و الإهتزازية و إنتقال الحرارة و غيرها المستخدمة في كثير من التطبيقات الهندسية و الفيزيائية .

متسلسلة فوريية للدالة f(x) عبارة عن تركيب خطي من دوال الجيب و الجيب تمام يعبر عنه بالشكل :

$$f(x) = a0 + \sum_{n=1}^{\infty} an \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} bn \sin nx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1).$$

إن إختلاف متسلسلة فوريية من دالة إلى أخرى هو قيم الثوابت ($a0 , an , bn$) و التي نجدها كالآتي :

١- لإيجاد $a0$ نكامل طرفي المتسلسلة (1) من $-\pi$ إلى π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} an \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} bn \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx .$$

$$\to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a0x\,]_{-\pi}^{\pi} + 0 + 0 = a0(\pi - (-\pi)) = 2a0\pi . \to \ a0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

---

٢ - لإيجاد an نكامل طرفي المتسلسلة (1) من $-\pi$ إلى π بعد ضرب طرفيها في ($\cos nx$) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + an \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2\,dx + bn \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx\,dx .$$

$$\to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 + \frac{an}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\,dx + 0 .$$

$$\to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{an}{2}\left[x + \frac{1}{2n} \sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{an}{2}(2\pi) = an\,\pi .$$

$$\to \ an = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

--

٣ - لإيجاد bn نتبع نفس الإسلوب السابق بعد ضرب طرفي المتسلسلة في ($\sin nx$) حيث يكون :

$$bn = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

<u>مثال ١</u> : جد متسلسلة فوريية للدالة (إنشر الدالة) (f(x) = x) :

$$\_ \quad a0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \ \to \ a0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx. = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right] = 0.$$

$$an = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx. = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right\}.$$

$$\rightarrow an = \frac{1}{\pi}\left\{0 + \left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\{0+0\} = 0.$$

$$bn = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx. = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\ dx. = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right\}.$$

$$\rightarrow bn = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \left(\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) + 0\right\} = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} .$$

$$Since\ \ f(x) = a0 + \sum_{n=1}^{\infty} an\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} bn\sin nx .$$

$$\rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx .$$

$$\rightarrow x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x - \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

<u>ملاحظة :</u> ممكن إستخدام العلاقة أعلاه لإيجاد قيم تقريبية للأعداد المتسامية (π , e) و ذلك بتعويض قيمة x في $\frac{\pi}{2}$ ، ثم نضرب الطرفين في ٢ بعد تكملة الناتج .

<u>تبديل الفترة ($-\pi , \pi$) بالفترة ($-L$, L) :</u> للقيام بذلك نستخدم التحويل :

على فرض إن $\left(Z = \frac{\pi x}{L}\ .,\ dZ = \frac{\pi}{L}dx\ .\right)$

$$f(x) = f(z).,\quad -L \le x \le L\ .,\qquad -\pi \le Z \le \pi .$$

$$f(z) = a0 + \sum_{n=1}^{\infty} an\cos nz + \sum_{n=1}^{\infty} bn\sin nz .$$

$$\_\ \ a0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\,dz. \ \rightarrow\ a0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{\pi}{L}dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx .$$

بنفس **الطريقة يكون :**

$$\_\ \ an = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx .,\qquad bn = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx .$$

<u>مثال ١ :</u> جد متسلسلة فورييه للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 2 \le x \le 0. \\ 3 & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

$$f(x) = a0 + \sum_{n=1}^{\infty} an\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} bn\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) .$$

$$a0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx . = \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{0} -dx . + \int_{0}^{2} 3dx .\right\} = \frac{1}{4}\left\{[-x]_{-2}^{0} + [3x]_{0}^{2}\right\} = \frac{1}{4}\{-2+6\} =$$

1.

$$an = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} -cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} 3\,cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right\}.$$

$$an = \frac{1}{n\pi}\left\{\left[-\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[3\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2}\right\} = 0 .$$

$$bn = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} -\, sin\,\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} 3\, sin\,\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right\}.$$

$$bn = \frac{1}{n\pi}\left\{\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[-3\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2}\right\} = \frac{1}{n\pi}\{\,(1-\cos n\pi\,) - 3(\cos n\pi - 1)\,\}\ .$$

$$bn = \frac{1}{n\pi}\{\,(1-\cos n\pi\,) + 3(1-\cos n\pi)\,\} = \frac{4}{n\pi}\{\,(1-\cos n\pi\,)\} = \frac{4}{n\pi}\{\,(1-(-1)^{n}\}\ .$$

$$bn = \begin{cases} 0 \ \text{ if n is even.} \\ \frac{8}{n\pi}\ \ if\ n\ is\ odd. \end{cases}$$

$$\rightarrow\ f(x) = 1 + \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\ .$$

$$\rightarrow f(x) = 1 + \frac{8}{\pi}\{\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\ \sin\frac{5\pi x}{2}\ \ + \cdots \dots\dots\dots\dots\}.$$

<u>تمارين ((جد متسلسلة فورييه للدوال الآتية)) :</u>

1	$f(x) = \begin{cases} x & 2 \le x \le 0. \\ x+2 & 0 \le x \le 2. \end{cases}$
2	$f(x) = \begin{cases} 2x & 2 \le x \le 3. \\ x+1 & 3 \le x \le 4. \end{cases}$
3	$f(x) = \begin{cases} -2 & -\pi \le x \le 0. \\ 2 & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} 2 & -\pi \le x \le 0. \\ x & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$
5	$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0. \\ x^2 & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

<u>ملاحظة :</u> لحل السؤال الثاني نفرض إن (u = x - 3) لتكون الفترة متماثلة مع الفترات في بقية الأسئلة و الأمثلة التي تم حلها .
