إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ١٤ من أصل ١٥ محاضرة

معادلة التوصيل الحراري (The Heat Equation)

إن المعادلة التي تصف عملية إنتقال الحرارة في ذراع معدني طوله L و درجة حرارة نهايتيه مثبتة على الصفر و درجة الحرارة الإبتدائية للذراع تساوي $\emptyset(x)$ تكون بالصيغة :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ ., \qquad 0 \le x \le L$$

$$U(0,t) = 0., \ \ U(10\,,t) = 0., \quad U(x,0) = \emptyset(x).$$

هذه المعادلة تحل بطريقة فصل المتغيرات السابقة و كالآتي :

$$\mathbf{X'' + \lambda^2 X = 0} \,.\to \left(\mathbf{m^2 + \lambda^2}\right) = \mathbf{0},$$

$$m^2 = -\lambda^2., \ \to \ m = \mp \lambda i\,., \ \ \to X(x) = A1\,\mathbf{cos}\,\lambda\,x \ + A2\sin\,\lambda\,x\,..$$

$$,T' + a^2\,\lambda^2 T = 0\,.\to \ m + a^2\,\lambda^2 = 0.\to \quad m = -a^2\,\lambda^2., \quad \to \ T(t) = c1\,e^{-a^2\lambda^2 t} \ .$$

$$\to \ \mathbf{U(x,t) = \ e^{-a^2\lambda^2 t}\left\{A\cos\lambda\,x \ + B\ \sin\ \lambda\,x\right\}.(\ General\ Solution\ ).}$$

من الشرط الأول نحصل على (A = 0) :

$$\to \ \mathbf{U(x,t) = \ e^{-a^2\lambda^2 t}\,B\ \sin\ \lambda\,x\,.}$$

من الشرط الثاني نحصل على :

$$\to \ U(L,t) = \ e^{-a^2\lambda^2 t}\,B\ \sin\,\lambda L = 0\,., \ \to \ \ \lambda L = n\pi\,., \ \to \ \lambda = \frac{n\pi}{L} \ .$$

$$\to \ \mathbf{U(x,t) = \ e^{-a^2(\frac{n\pi}{L})^2 t}\,B\ \sin\frac{n\pi}{L}\,x\,.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*).}$$

بما إنه يوجد عدد لا ينتهي من n يحقق الحل $(*)$ فأنه يوجد عدد لا ينتهي من الحلول و لكون المعادلة الأصلية متجانسة فإن الحل العام لها عبارة عن مجموع تلك الحلول (أي إن) :

$$\mathbf{U(x,t) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}} \ Bn\ \ \mathbf{e^{-a^2(\frac{n\pi}{L})^2 t}\ \ \sin\frac{n\pi}{L}\,x\,.}$$

من الشرط الثالث نحصل على :

$$\to \mathbf{U(x,t) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}}\ Bn\ \mathbf{\sin\frac{n\pi}{L}\,x} = \ \emptyset(x) \ .$$

حيث إن Bn هي معاملات فورييه الجيبية للدالة $\emptyset(x)$ على الفترة (0 , L).

<u>مثال ١ :</u> ذراع معدني طوله 2 و درجة حرارة نهايتيه مثبتة على الصفر و درجة الحرارة الإبتدائية للذراع هي $3x$ فما هي درجة حرارة نقاط الذراع في الأزمان المختلفة . ؟

<u>الحل :</u> درجة الحرارة تمثل بالمعادلة :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ ., \qquad 0 \le x \le 2$$

$$U(0,t) = 0., \ \ U(2\,,t) = 0., \quad U(x,0) = 3x.$$

إن حل هذه المعادلة يعطى بالعلاقة :

$$\mathbf{U(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \ \mathrm{Bn}\ \mathbf{e}^{-a^2(\frac{n\pi}{L})^2 t}\ \mathbf{sin}\frac{n\pi}{L}\ \mathbf{x}\,.$$

حيث إن Bn هي معاملات فورييه الجيبية للدالة $3x$ على الفترة (0 , 2).:

$$\boldsymbol{bn} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{dx}\,. = \frac{2}{2}\int_0^2 3x\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{dx}\,.\ = 3(\frac{2}{n\pi})\int_0^2 x\ \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{dx}\,.$$

$$= \frac{6}{n\pi}\left\{\left[-\mathrm{x}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \int_0^2 \boldsymbol{cos}\ \left(\frac{n\pi x}{2}\right)\mathrm{dx.}\right\}\,.$$

$$= \frac{-12}{n\pi}\ \boldsymbol{cos\, n\pi} = \frac{-12}{n\pi}\ (-\mathbf{1})^n\ = \frac{12}{n\pi}\ (-\mathbf{1})^{n+1}\ \ .$$

$$\rightarrow \mathbf{U(x,t)} = \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \ \mathbf{e}^{-a^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t}\ \mathbf{sin}\frac{n\pi}{2}\ \mathbf{x}\,.$$

طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلات الجزئية (Laplace Method To solve The P.D.E.) :

تتضمن هذه الطريقة استخدام تحويل لابلاس لحدود المعادلة التفاضلية الجزئية الذي يحول المعادلة إلى معادلة تفاضلية إعتيادية (بعد تبديل متغيراتها) والتي يكون حلها أسهل ثم يستخدم معكوس تحويل لابلاس لإرجاع كتابة المعادلة بمتغيراتها الأصلية .

يعرف تحويل لابلاس للدالة U(x,t) بالشكل :

$$\boldsymbol{L}[\,U(x,t)] = U(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\ \ U(x,t)\,dt\,.$$

و يعرف تحويل لابلاس للمشتقات الجزئية كالآتي :

$$\mathbf{1} -\ \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] = su =\ U(x,0).$$

$$\mathbf{2} -\ \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right] = s^2 u\ -\ sU(x,0)\ -\ \frac{\partial U}{\partial t}\ (x,0)\ \ .$$

$$\mathbf{3} -\ \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] = \frac{du}{dx}.\ ,$$

$$\mathbf{4} -\ \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2 u}{dx^2}\ \ .$$

يمكن إثبات هذه التحويلات بإستخدام التعريف كالآتي :

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st}\ \ \frac{\partial U}{\partial t}\ dt\,.,\ \{\,Let\ u = e^{-st}. \rightarrow du =\ -s\ e^{-st}\,, dv = \frac{\partial U}{\partial t}\ dt. \rightarrow v =$$

$$u(x,t).\}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}\right] =\ \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{u(x,t)}]_0^{\infty} + \mathrm{s}\ \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\ \ \mathrm{u(x,t)}\,\mathrm{dt}\,.$$

$$\rightarrow \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}\right] = -\mathrm{U}(\mathrm{x},0) + \mathrm{s}\,\mathrm{L}\,[\,\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})\}\mathrm{dt}\,. \;=\; su - u(x,0).$$

-

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right] = \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{t}}\right] \;.,\; Such\ that\ \ V = \frac{\partial U}{\partial t}\ .$$

$$\rightarrow \boldsymbol{L}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right] = sV - V(x,0) = s\,[\,su - u(x,0)] - \frac{\partial U}{\partial t}\,(x,0). = s^2 u - sU(x,0) - \frac{\partial U}{\partial t}\,(x,0)\ .$$

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\ \frac{\partial u}{\partial x}\ dt\,. = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}\ u\ dt\,. = \frac{du}{dx}\,.$$

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = \boldsymbol{L}\ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] = \boldsymbol{L}\ \left[\frac{\partial}{\partial x}\right].\boldsymbol{L}\ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left\{\frac{du}{dx}\right\} = \frac{d^2 u}{dx^2}\ .$$
