إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ١٥ من أصل ١٥ محاضرة.

مثال ١ : إستخدم طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلة :

$$U_x = 2\,U_t + U\,. \;;\quad U(x,0) = 6\,e^{-3x}\;.\;;\quad x > 0\,,\; t > 0\,.$$

$$L\,[\,U_x\,] = 2L\,[\,U_t\,] + L\,[U\,]\,.$$

$$\frac{du}{dx} = 2\left\{su - u(x,0)\right\} + u\,. = 2su - 12\;e^{-3x} + u\,.$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} - (\,2s+1)u = \;-12\;e^{-3x}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*).$$

المعادلة $(*)$ معادلة تفاضلية إعتيادية خطية حلها كالآتي :

$$\mathbf{I.F.} = \mathbf{e}^{\int -(\,2s+1)dx} = \mathbf{e}^{-(\,2s+1)x}\;.$$

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{e}^{-(\,2s+1)x} = \int \mathbf{e}^{-(\,2s+1)x}\;(-12\;e^{-3x}\,)\,\mathbf{dx} + \mathbf{C}\;.$$

$$\rightarrow \mathbf{u}\,.\,\mathbf{e}^{-(\,2s+1)x} = -12\int \mathbf{e}^{-(\,2s+4)x}\;\mathbf{dx} + \mathbf{C}\,. = \frac{6}{s+2}\,.\,\mathbf{e}^{-(\,2s+4)x} + \mathbf{C}\,.$$

$$\rightarrow \mathbf{u} = \frac{6}{s+2}\,.\,\mathbf{e}^{-3x} + \mathbf{C}\,.\,\mathbf{e}^{(\,2s+1)x}\;.$$

و بما إن السؤال يشترط بأن قيم الدالة $u(x,t)$ تكون محددة عند $(x > 0\,,\; t > 0)$ فإن C يجب أن تكون صفر .

$$\rightarrow \mathbf{u}\,(\mathbf{x},\mathbf{t}\,) = \frac{6}{s+2}\,.\,\mathbf{e}^{-3x}\;.$$

و بإستخدام معكوس تحويل لابلاس نحصل على :

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x},\mathbf{t}\,) = 6\,\mathbf{e}^{-2t-3x}. = 6\,\mathbf{e}^{-(2t+3x)}\;.$$

مثال 2 : إستخدم طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلة :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\;.\;;\quad 0 < x < 1\,,\; t > 0\,.$$

U(0,t) = U(1,t) = 0. ; U(x,0) = 3 sin $2\pi x$.

تطبيق تحويل لابلاس لطرفي المعادلة نحصل على :

$$su - u(x,0) = \frac{d^2u}{dx^2}\,. \quad\rightarrow\quad \frac{d^2u}{dx^2} - su = -3\sin 2\pi x\,.\ldots\ldots\ldots\ldots(*).$$

المعادلة $(*)$ معادلة تفاضلية إعتيادية ذات معاملات ثابتة و تحل كالآتي :

$$m^2 - s = 0\,.\;\rightarrow\; m^2 = s.\;\rightarrow\; m1,2 = \pm\sqrt{s}\,.$$

$$uc = c1\,e^{\sqrt{s}\,x} + c2\,e^{-\sqrt{s}\,x}\;.$$

$$up = \frac{1}{D^2 - s} . (-3 \sin 2\pi x). = \frac{1}{-4\pi^2 - s} . (-3 \sin 2\pi x) . (since\ D^2 = b^2)$$

$$\rightarrow up = \frac{3}{s + 4\pi^2} . (\sin 2\pi x)$$

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = c1\, e^{\sqrt{s}\,x} + c2\, e^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{3}{s+ 4\pi^2} . (\sin 2\pi x)$$

و بإستخدام شروط المعادلة :

L [U(0,t)] = U(0,S) = 0. ; L [U(1,t)] = U(1,S) = 0.

نحصل على :

U(0,S) = C1 + C2 = 0. ....(1).

$$\mathbf{U}(\mathbf{1}, \mathbf{S}) = c1\, e^{\sqrt{s}} + c2\, e^{-\sqrt{s}} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2).$$

بحل العلاقتين (1) و (2) نجد إن :

C1 = C2 = 0 .

و بذ لك يكون الحل للمعادلة بالشكل :

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{3}{s+ 4\pi^2} . (\sin 2\pi x).$$

و بإستخدام معكوس تحويل لابلاس نحصل على :

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{3}\ \mathbf{e}^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x .$$

تمارين : إستخدم طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلات الآتية :

1	$\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$. ; $0 < x < 5$, $t > 0$. U(0,t) = U(5,t) = 0. ; U(x,0) = 10 sin 4πx.
2	$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$. ; $0 < x < 2$, $t > 0$. U(0,t) = U(2,t) = 0. ; U(x,0) = 20 sin 2πx.
3	$\frac{\partial U}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$. ; $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$. U_x(0,t) = U($\frac{\pi}{2}$,t) = 0. ; U(x,0) = 20 sin 3πx.

المصادر

١- Jost.j , " Partial Differential Equations " , Springer verlag , New York

٢- John.F, " Partial Differential Equations " , Springer verlag , New York

٣- عطاالله ثامر العاني ، " المعادلات الجزئية " ، مطبعة جامعة بغداد ، بغداد