جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الثالثة

في المودولات

مثال 5: لتكن R حلقة و I إيديالاً يسارياً في R. عندئذ، I هو R – مودول يساري، وإذا كان J إيديالاً يمينياً في R، فهو أيضاً R – مودول يميني. وفي كلتا الحالتين، الجداء السلمي هو تماماً الجداء في الحلقة.

مثال 6: لتكن R حلقة و $R \supseteq I$ إيديالاً ما. إن عامل الحلقة R/I هو R – مودول يساري و R – مودول يميني في آن معاً بحسب تطبيقي الجداء:

$$R/I \times R \to R/I \qquad R \times R/I \to R/I$$

$$(a+I,b) \mapsto ab+I \qquad (a,b+I) \mapsto ab+I$$

ملاحظة: يجب التأكد من أن كلا من التابعين السابقين مُعرّف جيدا، أي أن كلا منهما هو بالحقيقة تطبيق. لكن ذلك سهل، فمثلاً، إذا كان $b+I=b'+I$ في $R \mid I$ و $R \ni r$، فإن $I \ni b-b'$ و $I \ni r(b-b')=rb-rb'$. إذاً:

$$rb+I=rb'+I \quad \text{أو} \quad rb-rb'+I=I$$

والتطبيق مُعرّف جيداً. وبشكل مماثل نناقش الحالة الثانية. إن هذا المثال يدعونا إلى التحذير الآتي: لنتأمل عامل الحلقة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ كمودول فوق $\mathbb{Z}$ وفقا للمثال السابق. عندئذ $3+6\mathbb{Z} \neq 0 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ و $2 \neq 0$ في $\mathbb{Z}$. لكن:

$$2(3+6\mathbb{Z})=6+6\mathbb{Z}=0 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

إذاً، نتيجة جداء عنصر مختلف عن الصفر من مودول بسلمية مختلفة عن الصفر هو في هذه الحالة الخاصة، صفر. إن مثل هذه الحالة لا يمكن حدوثها في الفراغات الشعاعية فوق الحقل. وعلى القارئ ملاحظة ذلك دائماً والانتباه إليه.

مثال 7: إذا كان M و M' R – مودولين، فإن $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ زمرة تبديلية بالنسبة إلى العملية:

$$(f+g)(m)=f(m)+g(m),\quad \forall m\in M,\quad \forall f,g\in \mathrm{Hom}_R(M,M')$$

ولكن إذا أردنا جعل هذه الزمرة R – مودولا بالطريقة المألوفة بتعريف af بالعلاقة:

$$(af)(m)=af(m)\ ,\ \forall m\in M$$

نجد أن التابع af ليس من الضروري أن يكون R – هومومرفيزماً ما لم تكن الحلقة R تبديلية. ولتوضيح ذلك، نلاحظ أن:

$$(af)(rm)=af(rm)=a(rf(m))=arf(m)$$

وهذا التعبير الأخير يساوي $r(af(m)) = raf(m)$ فقط عندما تكون الحلقة R تبديلية ولكن ليس بالضرورة إذا لم يكن الأمر كذلك. إذاً، إذا كانت الحلقة R تبديلية، فإن $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ تصبح R – مودولاً من أجل كل R – مودولين M و M'، بينما إذا لم تكن الحلقة R تبديلية، فإن $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ تظل زمرة تبديلية فقط. بما أن $\mathrm{End}_R(M)$ حلقة حيث عملية الجداء هي جداء التطبيقات، وبما أنه يوجد هومومرفيزم حلقات:

$$\phi : R \to \mathrm{End}_R(M)$$

معرف بالعلاقة $\phi(a) = a\,\mathrm{id}_M$ حيث id_M التطبيق المطابق على M، فإنه ينتج من التعريف 3.2.1، وأن $\mathrm{End}_R(M)$ هي R – جبر، إذا كانت R حلقة تبديلية.

مثال 8: إذا كانت G زمرة تبديلية، فإن G هي $\mathbb{Z}$ – مودول، والتطبيق:

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) \to G$$

المعرف بالعلاقة $\phi(f)=f(1)$ هو هومومرفيزم زمر غامر ومتباين، أي أن ϕ هو إيزومرفيزم زمر. إن ϕ هو $\mathbb{Z}$ – إيزومرفيزم مودولات:

$$\phi(rf)=\phi(f+\cdots+f)=\phi(f)+\cdots+\phi(f)=r\phi(f)$$

هذا المثال يعمم كما يلي.

مثال 9: ليكن M R – مودولا. عندئذ:

$$\mathrm{Hom}_R(R,M)\cong M$$

بحسب التطبيق $\phi:\mathrm{Hom}_R(R,M)\to M$ المعرف بالعلاقة:

$$\phi(f)=f(1)$$

مثال 10: لتكن R حلقة تبديلية، و M R – مودولاً، وليكن S حلقة جزئية في $\mathrm{End}_R(M)$. عندئذ، M هو S – مودول بحسب تطبيق الجداء السلمي $S \times M \to M$ المعرف بالعلاقة:

$$(f, m) \to f(m)$$

مثال 11: إن هذا المثال هو حالة خاصة من المثال السابق. ليكن M R – مودولاً، و $\mathrm{End}_R(M) \ni T$. نعرف هومومرفيزم الحلقات:

$$\phi : R[x] \to \mathrm{End}_R(M)$$

بمقابلة x بـــ T و $R \ni a$ بـــ $a\mathrm{id}_M$. إذا كان:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x]$$

فإن:

$$\phi(f(x)) = f(T) = a_0 \mathrm{id}_M + a_1 T + \cdots + a_n T^n$$

ليكن $\mathrm{Im}(\phi) = R[T]$. إن الجداء:

$$R[T] \times M \to M$$
$$(f(T), m) \mapsto f(T)m = f(T)(m)$$

يحول M إلى $R[T]$ – مودول. وباستخدام الهومومرفيزم:

$$\phi : R[x] \to R[T]$$

نجد أن M هو $F[x]$ – مودول بواسطة الجداء السلمي:

$$F[x] \times M \to M$$

$$(f(x), m) \mapsto f(x)m = f(T)(m)$$

هذا المثال هو في غاية الأهمية، كما سنرى مستقبلاً. إنه يشكل قاعدة لتطبيق نظرية المودولات فوق $P.I.D$ لدراسة إندومرفيزمات فراغ شعاعي محدود القياس. لنعط مثالاً بسيطا على المثال 11.

مثال 12: ليكن F حقلاً ما، و $T:F^2 \to F^2$ إندومرفيزماً مُعرّفاً بالعلاقة $T(a,b)=(b,0)$. عندئذ $T^2=0$، وبالتالي، إذا كان:

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in F[x]$$

فإن:

$$f(T)=a_0+a_1T$$

لذلك، إذا كان $F^2 \ni v=(s,b)$ فإن الجداء السلمي $f(x)v$ يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} f(x)v &= f(x)(a,b)=f(T)(a,b) \\ &= (a_0\mathrm{id}_{F^2}+a_1T)(a,b) \\ &= (a_0a+a_1b,\ a_0b) \end{aligned}$$

مثال 13: لتكن R حلقة بواحدة 1، ولتكن:

$$R' = R^N = \{f : N \to R\}$$

أي أن R' هي مجموعة متتاليات عناصر من R. نعرف على R' عملية جمع " + " بالشكل: من أجل كل $R' \ni g, f$ نعرف:

$$f + g : \mathbb{N} \to R$$

بالعلاقة $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ من أجل كل $\mathbb{N} \ni n$. عندئذ، تصبح R' زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية الجمع السابقة واحدتها التطبيق الصفري 0. وإذا كانت R حلقة تبديلية، فإن قانون الجداء السلمي:

$$R \times R' \to R' \quad ; \quad (r, f) \mapsto r f$$

يجعل R' R – مودولاً.

إن هذا المثال هام جدا كما سنجد مستقبلاً بعضاً من فوائده.

مثال 14: لتكن $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. إن V زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية الجمع " + " المُعرّفة بالعلاقة:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

كما أن تطبيق الجداء السلمي $\mathbb{R}\times V\to V$ ، المُعرّف بالعلاقة:

$$(r,(a,b))\mapsto r(a,b)=(ra,rb)$$

يحول V إلى $\mathbb{R}$ – فراغ شعاعي. إذاً، V منتهي التوليد فوق $\mathbb{R}$ ، لأن:

$$V=\mathbb{R}(1,0)\oplus\mathbb{R}(0,1)$$

إن هذا الفراغ يمثل هندسياً المستوي الكارتيزي (الديكارتي). إذا كان F حقلاً ما، فإن $V=F\times F$ فراغ شعاعي فوق F. وتوضيح ذلك، تماماً كما في حالة $\mathbb{R}$ السابقة.

مثال 15: ليكن F حقلاً ما، و n عدداً صحيحاً موجباً. لتكن:

$$V=F^n=F\times\cdots\times F \qquad (n \text{ مرة})$$

إن V فراغ شعاعي فوق F بالنسبة للعمليتين:

تطبيق الجمع $V \times V \to V$، حيث:

$$((a_i),(b_i)) \mapsto (a_i)+(b_i)=(a_i+b_i) \quad ; \quad 1 \le i \le n$$

وتطبيق الجداء السلمي، حيث:

$$(a,(a_i)) \mapsto a(a_i)=(aa_i) \quad ; \quad 1 \le i \le n$$

إن V منتهي التوليد فوق F، فهو مولد بالمجموعة:

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$$

أي أن:

$$V=F^n=Fe_1 \oplus \cdots \oplus Fe_n$$

كل فراغ شعاعي محدود القياس فوق الحقل F هو أحد هذه الفراغات من أجل n ما.

ملاحظة: إذا كان $n = 1$، فإن V الزمرة الجمعية لـــ F، والجداء السلمي هو تماما الجداء في F. إذاً، كل حقل يمكن اعتباره فراغاً شعاعياً فوق نفسه.