



# جامعة الأنبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات ( مقاسات )

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

( المودولات )

د. محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الخامسة

في المودولات

نظرية 3.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الثالثة): ليكن  $M$  -  $R$  مودولاً،  $P$  و  $N$

مودولين جزئيين في  $M$ ، حيث  $N \supseteq P$ ، عندئذ:

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

البرهان: نُعرّف التطبيق  $f: M/P \rightarrow M/N$  بالعلاقة:

$$f(m+P) = m+N$$

إن  $f$  معروف جيداً: ليكن  $m+P = m'+p$ ، عندئذ  $m-m' \in P$ ، وبالتالي:

$$f(m-m'+P) = m-m'+N = N$$

$$\Rightarrow m+N = m'+N$$

إن نواة  $f$  هي:

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \{m+P \in M/P : m+N = N\} \\ &= \{m+P \in M/P : m \in N\} \\ &= N/P\end{aligned}$$

إذا، بحسب النظرية 1.5.1 نجد:

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

□

كما هو مقرر.

**نظرية 4.5.1 (نظرية التقابل):** ليكن  $M$  -  $R$  مودولاً،  $N$  مودولاً جزئياً في  $M$

و  $\varphi: M \rightarrow M/N$  الإسقاط الطبيعي، عندئذ، يُعرف التقابل  $P \mapsto P/N$  تقابلاً

1-1 بين مجموعة المودولات الجزئية في  $M$  والتي تحوي  $N$  وبين مجموعة المودولات

في  $M/N$ ، وهذا التقابل يحافظ على الاحتواء.

البرهان: لتكن  $S_1 = \{P : P \supseteq N\}$  ومجموعة المودولات الجزئية في

$S_2 = \{M/N\}$  نعرف  $\alpha : S_1 \longrightarrow S_2$  بالعلاقة التالية:

$$\alpha(P) = \text{Im}(\varphi_0) = P/N \quad \text{حيث } \varphi_0 = \varphi|_N$$

أولاً، إن  $\alpha$  متباين: ليكن  $P_1, P_2 \in S_1$  و  $\alpha(P_1) = \alpha(P_2)$ ، عندئذ، من أجل كل

$x \in P_1$  يكون  $x_1 + N = \varphi(x_1) \in P_1/N = P_2/N \ni x_1 + N = \varphi(x_1)$ ، ليكن  $x_2 + N = x_1 + N$ ،  
 $P_2 \ni x_2$ ، وينتج من ذلك أن:

$$x_1 - x_2 \in N \subseteq P_2 \Rightarrow x_1 \in P_2 \Rightarrow P_1 \subseteq P_2$$

وبالمثل نجد  $P_2 \subseteq P_1$ ، إذا  $P_2 = P_1$  و  $\alpha$  متباين.

ثانياً،  $\alpha$  غامر: ليكن  $K \in S_2$ . عندئذ  $\varphi^{-1}(K)$  مودول جزئي في  $M$  يحوي  $N$

و  $\alpha(\varphi^{-1}(K)) = K$ ، وبالتالي،  $\alpha$  غامر. إذا  $\alpha$  تقابل 1-1 بين  $S_1$  و  $S_2$ .  $\square$

لنعد الآن إلى المجموع المباشر لأسرة مودولات جزئية منتهية. لنكن  $M_1, \dots, M_n$  - مودولات. بحسب تعريف الجداء الديكارتي لهذه الأسرة يكون

$$M = \prod_{i=1}^n M_i = M_1 \times \dots \times M_n$$

- مودولاً.

لنكن  $N_1, \dots, N_n$  مودولات جزئية في  $M_1, \dots, M_n$ ، على الترتيب، عندئذ

$$N = \prod_{i=1}^n N_i = N_1 \times \dots \times N_n$$

مودول جزئي في  $M$  كما يمكن التأكيد من ذلك بسهولة.

نظرية 5.5.1: بنفس الرموز والفرضيات السابقة، يكون:

$$M/N \cong M_1/N_1 \times \cdots \times M_n/N_n$$

البرهان: بالاستقراء بحسب  $n$ . إذا كان  $n = 2$ ، فإن التطبيق:

$$f: M_1 \times M_2 \cong M_1/N_1 \times M_2/N_2$$

المعرف بالعلاقة  $f(m_1, m_2) = (m_1 + N_1, m_2 + N_2)$  هو هومومرفيزم مودولات  
غامر. ولكن:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 : (m_1 + N_1, m_2 + N_2) = 0\} \\ &= \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 : (m_1 + N_1, m_2 + N_2) = (N_1, N_2)\} \\ &= \{(m_1, m_2) : m_1 \in N_1, m_2 \in N_2\} \\ &= N_1 \times N_2 \end{aligned}$$



إذا،

$$M/N \cong M_1/N_1 \times \cdots \times M_n/N_n$$

□ إذا كان  $n > 2$ ، فإن المطلوب ينتج بالاستقراء.

إذا كانت  $M_n, \dots, M_1$  مودولات جزئية في  $R$  - مودول  $M$ ، فإن

$M_1 \times \cdots \times M_n \cong M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$  وفق التماثل  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$  الذي

يُعرف إيزومرفيزماً بين هذين المودولين، وفي هذه الحالة تأخذ النظرية 5.5.1 الصيغة

التالية:

النظرية 5.5.1: لتكن  $M_n, \dots, M_1$  مودولات جزئية في  $R$  - مودول  $M$ ،

و  $N_i$  مودول جزئي في  $M_i$  من أجل كل  $i = 1, 2, \dots, n$ ، عندئذ:

$$\frac{M_1 \otimes \dots \otimes M_n}{N_1 \otimes \dots \otimes N_n} \cong \frac{M_1}{N_1} \otimes \dots \otimes \frac{M_n}{N_n}$$

البرهان: يشبه برهان النظرية 5.5.1.

## 1 - 6 المجموع المباشر والجداء المباشر

نظراً لأهمية المجموع المباشر والجداء المباشر للمودولات نفرده له بنداً خاصاً.

**تعريف 1.6.1:** لتكن  $(M_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - مودولات. نسمي جداءً مباشراً

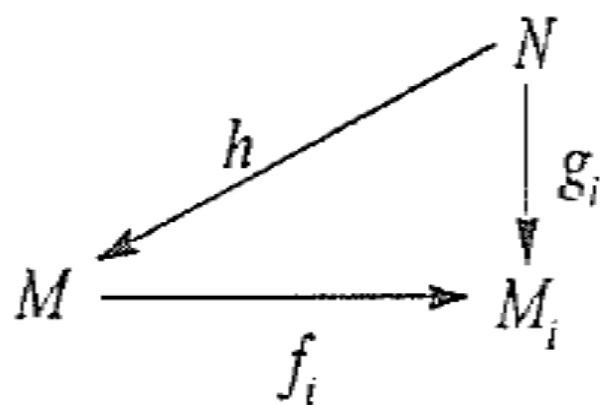
للأسرة  $(M_i)_{i \in I}$ ، الثنائية  $(M, (f_i)_{i \in I})$ ، حيث  $M$  - مودول  $R$  و  $(f_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  -

هومومورفيزمات  $f_i: M \rightarrow M_i$  تحقق الشرط الآتي: إذا كان  $N$  - مودولاً،

و  $(g_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - هومومورفيزمات  $g_i: N \rightarrow M_i$ ، فإنه يوجد  $R$  هومومورفيزم وحيد

$h: N \rightarrow M$ ، بحيث يكون  $f_i \circ h = g_i$  من أجل كل  $i$ ، أي بحيث يكون المخطط التالي

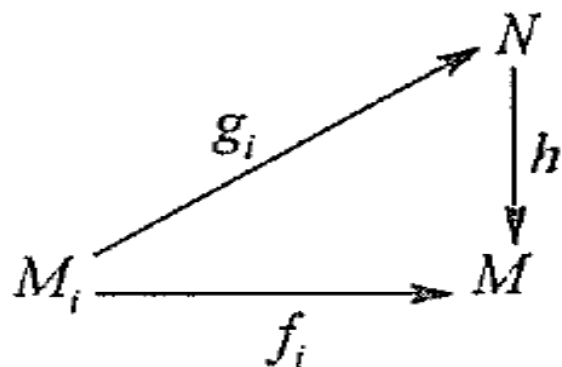
تبدلياً:



والمفهوم المعاكس (المزدوج، المثنوي لـ) الجداء المباشر هو المجموع المباشر. وهاكم التعريف.

**تعريف 2.6.1:** لتكن  $(M_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - مودولات. نسمي مجموعاً مباشراً (جداً معاكساً، مثنوياً، مزدوجاً) للأسرة  $(M_i)_{i \in I}$ ، الثنائية  $(M, (f_i)_{i \in I})$ ، المؤلف من  $R$  - مودول  $M$  وأسرة  $R$  - هومومورفيزمات  $(f_i)_{i \in I}$  حيث  $f_i: M_i \rightarrow M$  تحقق الشرط الآتي: إذا كان  $N$  - مودولاً و  $(g_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - هومومورفيزمات

فإنه يوجد  $R$  - هومومورفيزم وحيد  $h: M \rightarrow N$  بحيث يكون  
 $h \circ f_i = g_i$  من أجل كل  $i$ ، أي بحيث يكون المخطط التالي تبديلياً:



في تعريف الجداء المباشر والمجموع المباشر يُقال إن الهومومورفيزم  $h$  مولد بالأسرة  
 $(g_i)_{i \in I}$ .

بعد هذين التعريفين، تبرز أسئلة من الشكل: هل يوجد الجداء المباشر للأسرة  
 $(M_i)_{i \in I}$ ؟ وإذا وجد، فهل هو وحيد؟ ما شكل هذا الجداء، أي ما شكل عناصره؟  
 الأسئلة نفسها تبرز بالنسبة إلى المجموع المباشر.

نبدأ بالفرضية الآتية:

فرضية 3.6.1: لتكن  $(M_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - مودولات:

1. إذا كان  $(M, (f_i)_{i \in I})$  جداء مباشراً للأسرة  $(M_i)_{i \in I}$ ، فإن  $f_i$  إبيمورفيزم.
2. إذا كان  $(M, (f_i)_{i \in I})$  مجموعاً مباشراً للأسرة  $(M_i)_{i \in I}$ ، فإن  $f_i$  مونومورفيزم.

البرهان:

1. من أجل كل  $I \ni i$  نأخذ  $M_i = M$  و  $\text{id}_{M_i} = g_j$  و  $g_j = 0$  إذا كان  $i \neq j$  في

التعريف 1.6.1. عندئذ، من العلاقة  $f_i \circ h = \text{id}_{M_i}$  نستنتج أن  $f_i$  إبيمورفيزم.

2. من أجل كل  $I \ni i$  نأخذ  $M_i = M$  و  $\text{id}_{M_i} = g_j$  و  $g_j = 0$  إذا كان  $i \neq j$ ،

عندئذ من العلاقة  $h \circ f_i = \text{id}_{M_i}$  نجد أن  $f_i$  مونومورفيزم.  $\square$

ننتقل الآن إلى برهان وجود الجداء المباشر لأسرة  $R$  - مودولات  $(M_i)_{i \in I}$ .

نذكر أنه إذا كانت  $(X_i)_{i \in I}$  أسرة مجموعات مزيلة (مفرقة) بالمجموعة  $I$ ، فإن

مجموعة الجداء المباشر  $\prod_{i \in I} X_i$  هي بالتعريف مجموعة كل التطبيقات:

$$f: I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

حيث  $X_i \ni f(i)$  من أجل كل  $i$ . وبشكل عملي مألوف نكتب  $x_i$  بدلا من  $f(i)$  ونركز لـ  $f$  بالرمز  $(x_i)_{i \in I}$ . إذا،  $\prod_{i \in I} X_i$  تتألف من تلك الأسر  $(x_i)_{i \in I}$  من العناصر من  $\prod_{i \in I} X_i$  حيث  $X_i \ni x_i$  من أجل كل  $i \in I$ .

إذا أعطينا أسرة  $R$  - مودولات  $(M_i)_{i \in I}$ ، فإن الجداء  $\prod_{i \in I} M_i$  يمكن تحويله إلى  $R$  مودول (يمكن إعطاؤه  $R$  - بنية مودولية) بطريقة بسيطة وسهلة، وذلك بتعريف قانوني تشكيل كما يلي:

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I} \quad (1)$$

$$\lambda (x_i)_{i \in I} = (\lambda x_i)_{i \in I} \quad (2)$$

سوف نرمز لهذا المودول المبني بهذا الشكل بالرمز  $\prod_{i \in I} M_i$ ، وندعوه الجداء المباشر (الكارتيزي) للأسرة  $(M_i)_{i \in I}$ .

من أجل كل  $i \in I$  نعرف التطبيق (حيث نكتب  $\prod M_i$  بدلاً من  $\prod_{i \in I} M_i$ )

للسهولة):

$$p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j$$

بالعلاقة:

$$p_j(m_i)_{i \in I} = m_j$$

وتسمى  $p_j$  إسقاطاً طبيعياً أو قانونياً على الحد أو المركبة  $M_j$ ، بسهولة نجد أن كل  $P_j$  هو  $R$  - إبيمورفيزم.

نظرية 4.6.1: من أجل كل أسرة  $R$  مودولات  $(M_i)_{i \in I}$  تكون الثنائية

$(\prod M_i, (p_i))$  جداءً مباشراً لهذه الأسرة.

البرهان: ليكن  $N$  - مودولاً كيفياً، و  $(g_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - هومومورفيزمات

$g_i : N \rightarrow M_i$  من أجل كل  $i \in I$ . نعرف التطبيق:

$$h: N \longrightarrow \prod M_i$$

كما يلي: من أجل كل  $N \ni x$  نأخذ المركبة  $i$  في  $f(x)$  بأنها  $(f(x))_i = g_i(x)$ .  
وبعبارة أخرى نعرف  $h$  بالعلاقة التالية:

$$h(x) = (g_i(x))_{i \in I}, \quad \forall x \in N$$

عندئذ، من السهل برهان أن  $h$  هو  $R$  - هومومرفيزم مودولات، و  $p_i \circ h = g_i$  من أجل كل  $i \in I$ .

ولبرهان وحدانية  $h$  نأخذ  $R$  - هومومرفيزماً آخر:

$$k: N \longrightarrow \prod M_i$$

حيث  $p_i \circ k = g_i$  من أجل كل  $i \in I$ . عندئذ،

$$k(x)_i = g_i(x) = h(x)_i, \quad \forall x \in N$$

وينتج من ذلك أن  $h = k$ .

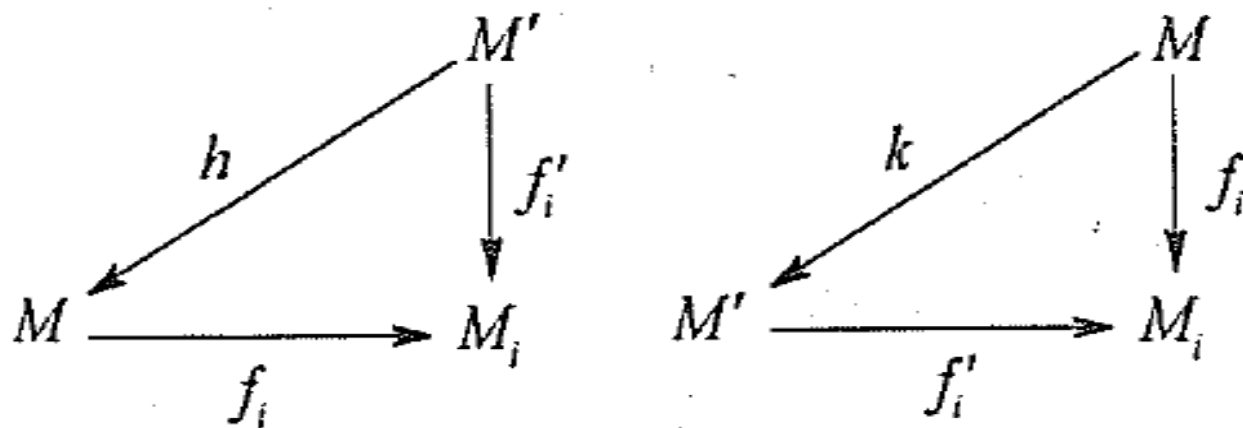
لنبرهن الآن وحدانية الجداء.

□

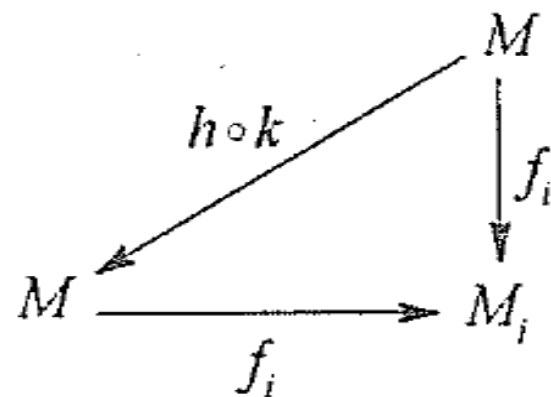


نظرية 5.6.1: ليكن  $(M, (f_i))$  جداءً مباشراً للأسرة  $(M_i)$ ، عندئذ،  
 $(M', (f'_i))$  جداء آخر لـ  $(M_i)$   $\Leftrightarrow$  يوجد  $R$ -إيزومورفيزم وحيد  $h: M' \rightarrow M$ ،  
 بحيث يكون  $f_i \circ h = f'_i$  من أجل كل  $i \in I$ .

البرهان: بحسب تعريف الجداء المباشر للأسرة  $(M_i)$  يوجد  $R$ -هومومورفيزم  
 وحيد  $h: M' \rightarrow M$  و  $R$ -هومومورفيزم وحيد  $k: M \rightarrow M'$ ، بحيث يكون المخططان:



تبدليين. وعندئذ يكون  $f_i \circ h \circ k = f'_i \circ k = f_i$  والمخطط:



تبديلي من أجل كل  $I \ni i$ . ولكن بحسب تعريف الجداء، يوجد  $R$  - هومومرفيزم واحد فقط يجعل المخطط الأخير تبدلياً من أجل كل  $I \ni i$ . ومن الواضح أن  $\text{id}_{M_i}$  يحقق ذلك. وهذا يعني أن  $h \circ k = \text{id}_{M_i}$ . وبطريقة مشابهة نجد أن  $k \circ h = \text{id}_M$ ، إذاً  $h$  هو  $R$  - ايزومرفيزم و  $h^{-1} = k$ .

بالعكس، لنفترض أن  $h$  هو  $R$  - ايزومرفيزم. عندئذ، بما أن  $f_i = f'_i \circ h^{-1}$  من أجل كل  $I \ni i$  فإننا نستطيع استخدام أن  $(M_i, (f_i))$  جداء لبناء، من أجل كل  $R$  - مودول  $N$  وكل أسرة  $R$  - هومومرفيزمات  $(g_i)$  حيث  $g_i: N \rightarrow M_i$ ، المخطط: