جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الخامسة

في المودولات

نظرية 3.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الثالثة): ليكن M R - مودولاً، P و N مودولين جزئيين في M، حيث $P \supseteq N$، عندئذ:

$$M / N \cong (M / P)/(N / P)$$

البرهان: نُعرّف التطبيق $f : M / P \longrightarrow M / N$ بالعلاقة:

$$f(m+P) = m+N$$

إن f معروف جيداً: ليكن $m+P = m'+p$، عندئذ $m-m' \in P$، وبالتالي:

$$f(m-m'+P) = m-m'+N = N$$

$$\Rightarrow m+N = m'+N$$

إن نواة f هي:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(f) &= \{m+P \in M/P : m+N = N\} \\ &= \{m+P \in M/P : m \in N\} \\ &= N/P\end{aligned}$$

إذاً، بحسب النظرية 1.5.1 نجد:

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

كما هو مقرر. □

نظرية 4.5.1 (نظرية التقابل): ليكن M R − مودولاً، N مودولاً جزئياً في M و $M/N \longrightarrow M/N$ $\varphi : M$ الإسقاط الطبيعي، عندئذ، يُعرّف التقابل $P \mapsto P/N$ تقابلاً 1-1 بين مجموعة المودولات الجزئية في M والتي تحوي N وبين مجموعة المودولات في M/N، وهذا التقابل يحافظ على الاحتواء.

البرهان: لتكن $S_1=\{P:P\supseteq N\}$ ومجموعة المودولات الجزئية في $S_2=\{M/N\}$ نعرف $\alpha:S_1\longrightarrow S_2$ بالعلاقة التالية:

$$\varphi_0=\varphi|N \text{ حيث } \alpha(P)=\operatorname{Im}(\varphi_0)=P/N$$

أولاً، إن α متباين: ليكن $P_1,P_2\ni S_1$ و $\alpha(P_1)=\alpha(P_2)$، عندئذ، من أجل كل $P_1\ni x$ يكون $P_1/N=P_2/N\ni x_1+N=\varphi(x_1)$. ليكن $x_2+N=x_1+N$، $P_2\ni x_2$، وينتج من ذلك أن:

$$x_1-x_2\in N\subseteq P_2\Rightarrow x_1\in P_2\Rightarrow P_1\subseteq P_2$$

وبالمثل نجد $P_2\subseteq P_1$، إذا $P_2=P_1$ و α متباين.

ثانياً، α غامر: ليكن $S_2\ni K$. عندئذ $\varphi^{-1}(K)$ مودول جزئي في M يحوي N و $\alpha(\varphi^{-1}(K))=K$، وبالتالي، α غامر. إذا α تقابل $1-1$ بين S_1 و S_2. □

لنعد الآن إلى المجموع المباشر لأسرة مودولات جزئية منتهية. لتكن $M_1,\cdots,M_n$ R – مودولات. بحسب تعريف الجداء الديكارتي لهذه الأسرة يكون $M=\prod_{i=1}^{n} M_i = M_1 \times\cdots\times M_n$ R–مودولاً.

لتكن $N_1,\cdots,N_n$ مودولات جزئية في $M_1,\cdots,M_n$، على الترتيب، عندئذ $N=\prod_{i=1}^{n} N_i = N_1 \times\cdots\times N_n$ مودول جزئي في M كما يمكن التأكيد من ذلك بسهولة.

نظرية 5.5.1: بنفس الرموز والفرضيات السابقة، يكون:

$$M/N \cong M_1/N_1 \times \cdots \times M_n/N_n$$

البرهان: بالاستقراء بحسب n. إذا كان $n=2$، فإن التطبيق:

$$f: M_1 \times M_2 \cong M_1/N_1 \times M_2/N_2$$

المعرف بالعلاقة $f(m_1, m_2) = (m_1 + N_1,\ m_2 + N_2)$ هو هومومرفيزم مودولات غامر. ولكن:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 : (m_1 + N_1, m_2 + N_2 = 0\} \\
&= \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 : (m_1 + N_1, m_2 + N_2 = (N_1, N_2)\} \\
&= \{(m_1, m_2) :\ m_1 \in N_1,\ \ m_2 \in N_2\} \\
&= N_1 \times N_2
\end{aligned}$$

إذاً،

$$M/N \cong M_1/N_1 \times \cdots \times M_n/N_n$$

إذا كان $n > 2$، فإن المطلوب ينتج بالاستقراء. ▯

إذا كانت $M_1, \cdots, M_n$ مودولات جزئية في R - مودول M، فإن $M_1 \times \cdots \times M_n \cong M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ وفق التقابل $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$ الذي يُعرّف إيزومرفيزماً بين هذين المودولين، وفي هذه الحالة تأخذ النظرية 5.5.1 الصيغة التالية:

النظرية 5'.5.1: لتكن $M_1,\cdots,M_n$ مودولات جزئية في R − مودول M، و N_i مودول جزئي في M_i من أجل كل $i=1,2,\cdots,n$، عندئذ:

$$\frac{M_1\otimes\cdots\otimes M_n}{N_1\otimes\cdots\otimes N_n}\cong\frac{M_1}{N_1}\otimes\cdots\otimes\frac{M_n}{N_n}$$

البرهان: يشبه برهان النظرية 5.5.1. □

1 − 6 المجموع المباشر والجداء المباشر

نظراً لأهمية المجموع المباشر والجداء المباشر للمودولات نفرد له بنداً خاصاً.

تعريف 1.6.1: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R − مودولات. نسمي جداءً مباشراً للأسرة $(M_i)_{i\in I}$، الثنائية $(M,(f_i)_{i\in I})$، حيث M R − مودول و $(f_i)_{i\in I}$ أسرة R − هومومرفيزمات $f_i:M\to M_i$ تحقق الشرط الآتي: إذا كان N R − مودولاً، و $(g_i)_{i\in I}$ أسرة R − هومومرفيزمات $g_i:N\to M_i$، فإنه يوجد R هومومرفيزم وحيد $h:N\to M$، بحيث يكون $f_i\circ h=g_i$ من أجل كل i، أي بحيث يكون المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\
M \arrow[r, "f_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

والمفهوم المعاكس (المزدوج، المتّوي لـــ) الجداء المباشر هو المجموع المباشر. وهاكم التعريف.

تعريف 2.6.1: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات. نسمي مجموعاً مباشراً (جداءً معاكساً، متّوياً، مزدوجاً) للأسرة $(M_i)_{i\in I}$، الثنائية $(M,(f_i)_{i\in I})$، المؤلفة من R – مودول M وأسرة R – هومومرفيزمات $(f_i)_{i\in I}$ حيث $f_i : M_i \to M$ تحقق الشرط الآتي: إذا كان N R – مودولا و $(g_i)_{i\in I}$ أسرة R – هومومرفيزمات

$g_i : M_i \to N$، فإنه يوجد R – هومومرفيزم وحيد $h : M \to N$، بحيث يكون $h \circ f_i = g_i$ من أجل كل i، أي بحيث يكون المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, "h"] \\
M_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "f_i"'] & M
\end{tikzcd}$$

في تعريف الجداء المباشر والمجموع المباشر يقال إن الهومومرفيزم h مولد بالأسرة $(g_i)_{i \in I}$.

بعد هذين التعريفين، تبرز أسئلة من الشكل: هل يوجد الجداء المباشر للأسرة $(M_i)_{i \in I}$؟ وإذا وجد، فهل هو وحيد؟ ما شكل هذا الجداء، أي ما شكل عناصره؟ الأسئلة نفسها تبرز بالنسبة إلى المجموع المباشر.

نبدأ بالفرضية الآتية:

فرضية 3.6.1: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات:

1. إذا كان $(M,(f_i)_{i\in I})$ جداءً مباشراً للأسرة $(M_i)_{i\in I}$، فإن f_i إبيمورفيزم.
2. إذا كان $(M,(f_i)_{i\in I})$ مجموعاً مباشراً للأسرة $(M_i)_{i\in I}$، فإن f_i مونومرفيزم.

البرهان:

1. من أجل كل $i\in I$ نأخذ $M_i=M$ و $\mathrm{id}_{M_i}=g_j$ و $g_j=0$ إذا كان $i\neq j$ في التعريف 1.6.1. عندئذ، من العلاقة $f_i\circ h=\mathrm{id}_{M_i}$ نستنتج أن f_i إبيمورفيزم.
2. من أجل كل $i\in I$ نأخذ $M_i=M$ و $\mathrm{id}_{M_i}=g_j$ و $g_j=0$ إذا كان $i\neq j$، عندئذ من العلاقة $h\circ f_i=\mathrm{id}_{M_i}$، نجد أن f_i مونوموفيزم. □

ننتقل الآن إلى برهان وجود الجداء المباشر لأسرة R – مودولات $(M_i)_{i\in I}$.

نذكر أنه إذا كانت $(X_i)_{i\in I}$ أسرة مجموعات مزيلة (مفرقة) بالمجموعة I، فإن مجموعة الجداء المباشر $\prod_{i\in I} X_i$ هي بالتعريف مجموعة كل التطبيقات:

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$$

حيث $f(i) \in X_i$ من أجل كل i. وبشكل عملي مألوف نكتب x_i بدلا من $f(i)$ ونركز لـــ f بالرمز $(x_i)_{i\in I}$. إذاً $\prod_{i\in I} X_i$ تتألف من تلك الأسر $(x_i)_{i\in I}$ من العناصر من $\prod_{i\in I} X_i$ حيث $x_i \in X_i$ من أجل كل $i \in I$.

إذا أعطينا أسرة R – مودولات $(M_i)_{i\in I}$، فإن الجداء $\prod_{i\in I} M_i$ يمكن تحويله إلى R مودول (يمكن إعطاؤه R – بنية مودولية) بطريقة بسيطة وسهلة، وذلك بتعريف قانوني تشكيل كما يلي:

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I} \qquad (1)$$

$$\lambda (x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I} \qquad (2)$$

سوف نرمز لهذا المودول المبني بهذا الشكل بالرمز $\prod_{i\in I} M_i$، وندعوه الجداء المباشر (الكارتيزي) للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

من أجل كل $i \in I$ نعرف التطبيق (حيث نكتب $\prod M_i$ بدلا من $\prod_{i\in I} M_i$ للسهولة):

$$p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j$$

بالعلاقة:

$$p_j(m_i)_{i\in I}) = m_j$$

ونسمي p_j إسقاطاً طبيعياً أو قانونياً على الحد أو المركبة M_j، بسهولة نجد أن كل P_j هو R – إيبيمورفيزم.

نظرية 4.6.1: من أجل كل أسرة R مودولات $(M_i)_{i\in I}$ تكون الثنائية $(\prod M_i, (p_i))$ جداءً مباشراً لهذه الأسرة.

البرهان: ليكن N R – مودولاً كيفياً، و $(g_i)_{i\in I}$ أسرة R – هومومرفيزمات $g_i : N \to M_i$ من أجل كل $i \in I$. نعرف التطبيق:

$$h : N \longrightarrow \prod M_i$$

كما يلي: من أجل كل $x \in N$ نأخذ المركبة i في $f(x)$ بأنها $(f(x))_i = g_i(x)$.

وبعبارة أخرى تعرف h بالعلاقة التالية:

$$h(x) = (g_i(x))_{i\in I}\ ,\quad \forall\, x \in N$$

عندئذ، من السهل برهان أن h هو R – هومومرفيزم مودولات، و $p_i \circ h = g_i$ من أجل كل $i \in I$.

ولبرهان وحدانية h نأخذ R – هومومرفيزماً آخر:

$$k : N \longrightarrow \prod M_i$$

حيث $p_i \circ k = g_i$ من أجل كل $i \in I$. عندئذ،

$$k(x)_i = g_i(x) = h(x)_i\ ,\quad \forall\, x \in N$$

وينتج من ذلك أن $h = k$. □

لنبرهن الآن وحدانية الجداء.

نظرية 5.6.1: ليكن $(M,(f_i))$ جداءً مباشراً للأسرة (M_i)، عندئذ، $(M',(f'_i))$ جداء آخر لـ (M_i) $\Leftrightarrow$ يوجد R − إيزومرفيزم وحيد $h: M' \to M$، بحيث يكون $f_i \circ h = f'_i$ من أجل كل $i \in I$.

البرهان: بحسب تعريف الجداء المباشر للأسرة (M_i) يوجد R − هومومرفيزم وحيد $h: M' \to M$ و R− هومومرفيزم وحيد $k: M \to M'$، بحيث يكون المخططان:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f'_i"] \\ M \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f_i"] \\ M' \arrow[r, "f'_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديليين. وعندئذ يكون $f_i \circ h \circ k = f'_i \circ k = f_i$ والمخطط:

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "h\circ k"'] \arrow[d, "f_i"] \\
M \arrow[r, "f_i"'] & M_i
\end{tikzcd}
$$

تبديلي من أجل كل $I \ni i$. ولكن بحسب تعريف الجداء، يوجد R – هومومرفيزم واحد فقط يجعل المخطط الأخير تبديلياً من أجل كل $I \ni i$. ومن الواضح أن id_M يحقق ذلك. وهذا يعني أن $h\circ k=\mathrm{id}_M$. وبطريقة مشابهة نجد أن $k\circ h=\mathrm{id}_M$، إذاً، h هو R – إيزومرفيزم و $h^{-1}=k$.

بالعكس، لنفترض أن h هو R – إيزومرفيزم. عندئذ، بما أن $f_i=f_i'\circ h^{-1}$ من أجل كل $I \ni i$ فإننا نستطيع استخدام أن $(M,(f_i))$ جداء لبناء، من أجل كل R – مودول N وكل أسرة R – هومومرفيزمات (g_i) حيث $g_i : N\to M_i$، المخطط: