



# جامعة الأنبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات ( مقاسات )

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

( المودولات )

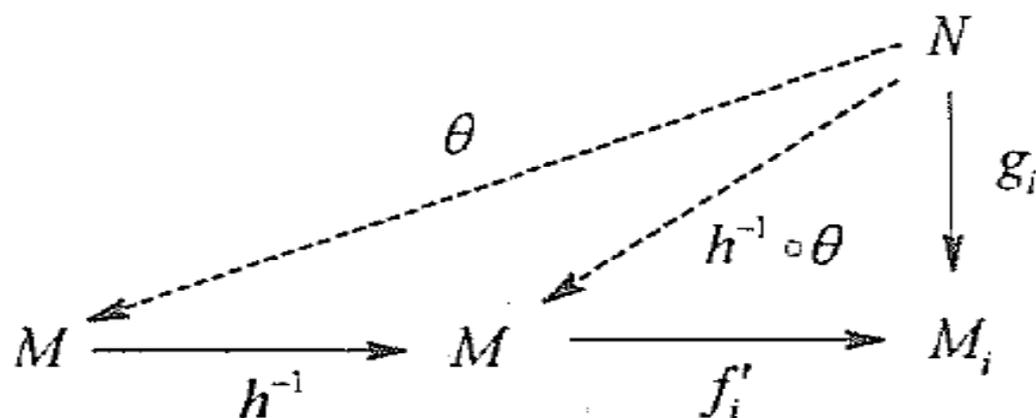
د. محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة السادسة

في المودولات



□ إن وحدانية  $\theta$  تقتضي الآن أن الثنائية  $(M', (f'_i))$  هي أيضاً جداء للأسرة  $(M_i)$ .

من النظرية 4.6.1 والنظرية 5.6.1 نستنتج مباشرة خاصيتين هامتين للجداء،

وأعني بهما الخاصة التبادلية والخاصة التجميعية.

نتيجة 6.6.1 (تبادلية الجداء): لتكن  $(M_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - مودولات، عندئذ:

$$\prod_i M_i = \prod_i M_{\sigma(i)}, \sigma \in S_I$$

البرهان: إن الثنائية  $(\prod M_{\sigma(i)}, p_{\sigma(i)})$  هي أيضاً جداء للأسرة  $(M_i)$ ،

والمطلوب ينتج مباشرة من نظرية الوجدانية (النظرية 5.6.1). □

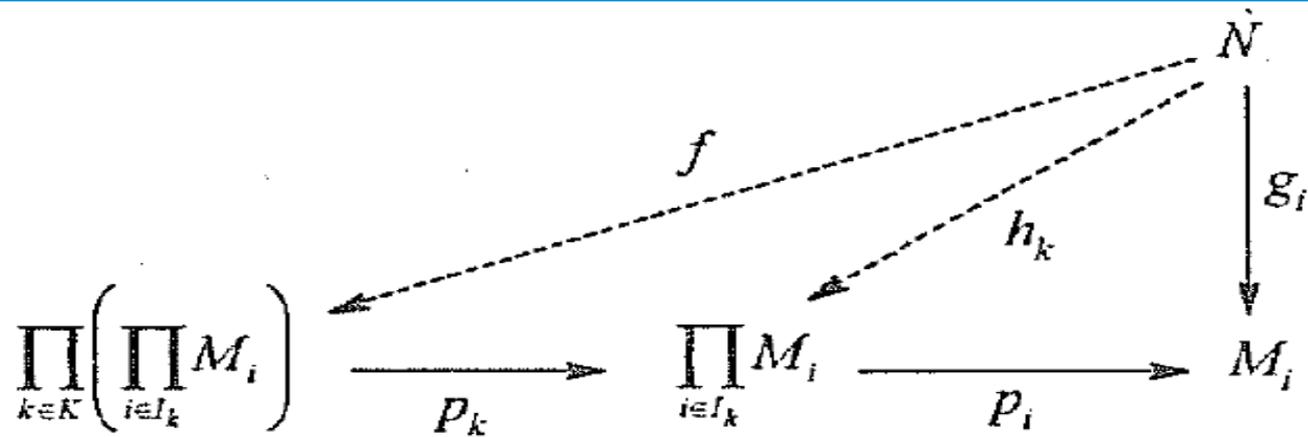
نتيجة 7.6.1 (تجميعية الجداء): لتكن  $(I_k)$  تجزئة لـ  $I$ ، حيث  $K \ni k$ .

عندئذ:

$$\prod_{i \in I} M_i \cong \prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} M_i \right)$$

البرهان: ليكن  $R = N$  - مودولاً كيفياً، إذا أعطينا أي  $M_i$  نأخذ  $K \ni k$  بحيث

يكون  $I_k \ni i$ . عندئذ يوجد في المخطط:



$R$  - هومورفيزم وحيد  $h_k : N \rightarrow \prod_{i \in I_k} M_i$  ، بحيث يكون:

$$p_i \circ h_k = g_i, \quad \forall i \in I_k$$

و  $R$  - هومورفيزم وحيد  $f : N \rightarrow \prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} M_i \right)$  ، بحيث يكون:

$$p_i \circ h_k \circ f = g_i \quad (*)$$

ليكن الآن  $f' : N \rightarrow \prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} M_i \right)$  - هومورفيزماً آخر، يحقق أيضاً العلاقة

(\*) . إذا كان  $N \ni x$  ، نأخذ  $K \ni k$  ، حيث مهما يكن  $K \ni k$  ، فإن

فإن  $x_k = (m_i)_{i \in I_k}$  وليكن  $f'(x) = (x'_k)_{k \in K}$  حيث مهما يكن  $K \ni k$ ، فإن  
 عندئذ، لدينا:  $x'_k = (m'_i)_{i \in I_k}$

$$g_i(x) = (p_i p_k)(f(x)) = p_i(x_k) = m_i$$

$$g_i(x) = (p_i p_k)(f'(x)) = p_i(x'_k) = m_i$$

وبالتالي، فإن  $f(x) = f'(x)$  و  $f = f'$ . وهذا يبين أن:

$$\prod_{k \in K} \left( \prod_{i \in I_k} M_i \right)$$

بالإضافة إلى الأسرة  $(p_i \circ p_k)_{i \in I_k}$ ، جداء لأسرة المودولات  $(M_i)_{i \in I}$ . ووحداية

الإيزومرفيزم المطلوب تنتج الآن من النظرية 5.6.1.  $\square$

نتنقل الآن إلى دراسة الجداء المعاكس (المجموع المباشر) لأسرة  $R$  - مودولات  $(M_i)_{i \in I}$ . سأبرهن نظريتين متعلقتين بالمجموع المباشر. إحداهما تبرهن على وجود هذا المجموع، وتبرهن الثانية على وحدانيته. ولصوغ وبرهان هاتين النظريتين نمهد ما يلي:

لتكن  $(M_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - مودولات، ولنتأمل المجموعة الجزئية في مودول الجداء الكارتيزي (الديكارتني)  $\prod_{i \in I} M_i$ ، المؤلفة من أسرة العناصر  $(m_k)_{i \in I}$  من  $\prod_i M_i$  حيث  $m_i = 0$  من أجل كل  $I_k \ni i$  تقريباً. أي أن  $m_i = 0$  ما عدا من أجل عدد محدود من العناصر  $m_i$ . من الواضح أن هذه المجموعة تشكل مودولاً جزئياً في  $\prod_i M_i$ . يسمى هذا المودول الجزئي مجموعاً مباشراً خارجياً لأسرة المودولات  $(M_i)_{i \in I}$ ، ويرمز له بالرمز  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ . من أجل كل  $I \ni z$  نأخذ التطبيق:

$$q_j : M_j \longrightarrow \bigoplus M_i$$

المُعرّف بالعلاقة:

$$q_j(x) = (x_i)_{i \in I}$$

حيث  $x_i = 0$  إذا كان  $i \neq j$ ، و  $x = x_j$ . بسهولة نجد أن  $q_j$  من أجل  $I \ni j$  هو  $R$  -  
 هومومورفيزم مودولات متباين ( $R$  - مونومورفيزم)، يسمى الإحواء أو تطبيق الإحواء  
 لـ  $M_j$  في  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ .

**فرضية 8.6.1:** إذا كان  $(M, (f_i))$  جداءً معاكساً لأسرة  $R$  - مودولات  $(M_i)$ ،  
 فكل  $f_j$  هو  $R$  - مونومورفيزم.

البرهان: من أجل كل  $I \ni i$ ، نأخذ  $M_i = N$ ،  $\text{id}_{M_i} = g_i$ ، و  $g_i =$  التطبيق  
 الصفري 0. إذا كان  $i \neq j$  في تعريف الجداء المعاكس (التعريف 2.6.1). عندئذ، من  
 $h \circ f_i = \text{id}_{M_i}$  نجد أن  $f_j$  هو  $R$  - مونومورفيزم.  $\square$

نحن الآن في وضع يسمح لنا بالبرهان على وجود الجداء المعاكس لأسرة  $R$  -  
 مودولات  $(M_i)$ .

نظرية 9.6.1 (نظرية الوجود): من أجل كل أسرة  $R$  مودولات  $(M_i)_{i \in I}$  تكون الثنائية  $(\bigoplus_{i \in I} M_i, (q_i))$  جداءً معاكساً لهذه الأسرة.

البرهان: ليكن  $N$  - مودولاً كيفياً، و  $(g_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - هومومورفيزمات  $M_i \rightarrow N$  من أجل كل  $i \in I$ . نعرف

$$h: \bigoplus M_i \longrightarrow N$$

بالعلاقة:

$$h((m_i)) = \sum_i g_i(m_i)$$

[نلاحظ أن معرف جيداً لأن كل أسرة  $(m_i)$  تحوي فقط عدداً محدوداً من العناصر  $m_i$  المختلفة عن الصفر] من الواضح أن  $h$  هو  $R$  - هومومورفيزم. أضف إلى ذلك، من أجل كل  $x_i \in M_i$  لدينا:

$$(h \circ q_i)(x) = h(q_i(x)) = g_i(x)$$

وبالتالي  $h \circ q_i = g_i$  من أجل كل  $i \in I$ . لبرهان وحدانية  $h$ ، نفرض أن  $k: \bigoplus M_i \rightarrow N$  هو - هومومرفيزم آخر، حيث  $k \circ q_i = g_i$  من أجل  $i \in I$ . عندئذ، من أجل كل  $(m_i)$  من  $\bigoplus M_i$ ، لدينا (بفرض أن جميع المجاميع معرفة جيدا):

$$\begin{aligned} k((m_i)) &= k\left(\sum_i q_i(m_i)\right) = \sum_i (k \circ q_i)(m_i) \\ &= \sum_i g_i(m_i) = h((m_i)) \\ &\Rightarrow k = h \end{aligned}$$

وبذلك يتم برهان النظرية 9.6.1.

□

نظرية 10.6.1 (الوحدانية): لتكن  $(M_i)$  أسرة  $R$ -مودولات، و  $(M_i, f_i)$

جداؤها المعاكس. إن  $(M', f'_i)$  جداء آخر عندما فقط عندما يوجد  $R$ -إيزومورفيزم

$$h: M \rightarrow M', \text{ بحيث يكون } h \circ f_i = f'_i.$$

البرهان: مشابه لبرهان النظرية 5.6.1 (فهو مشوية).  $\square$

من النظريتين 9.6.1 و 10.6.1 نتبع خاصتا الجداء المعاكس الهامتان، وأعني

بهما الخاصة التبديلية والخاصة التجميعية.

نتيجة 11.6.1 (تبادلية الجداء المعاكس): لتكن  $(M_i)$  أسرة  $R$  - مودولات.

عندئذ:

$$\sigma \in S_I, \oplus M_i \cong \oplus M_{\sigma(i)}$$

البرهان: من الواضح أن  $(\oplus_{i \in I} M_{\sigma(i)}, (q_{\sigma(i)}))$  هي أيضاً جداء معاكس للأسرة

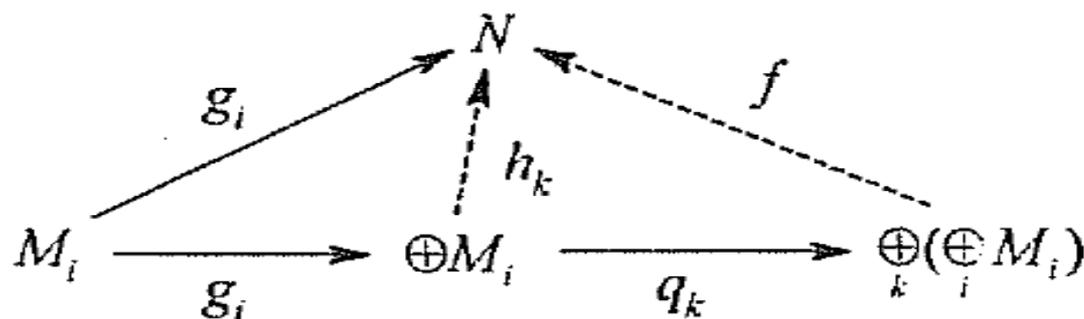
$(M_i)$ . وعندئذ ينتج المطلوب من النظرية 10.6.1.

نتيجة 12.6.1 (تجميعية الجداء المعاكس): تكن  $(M_i)$  أسرة  $R$  - مودولات،

و  $(I_k)_{k \in K}$  تجزئة لـ  $I$ ، عندئذ، يوجد  $R$  - هومومورفيزم:

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \bigoplus_{k \in K} \left( \bigoplus_{i \in I_k} M_i \right)$$

البرهان: ليكن  $R$  - مودولاً  $N$  - مودولاً  $M_i$  من أجل كل  $k \in K$ ، بحيث يكون  $i \in I_k$ . لتأمل المخطط الآتي:



في هذا المخطط  $h_k$  هو  $R$  - هومومرفيزم وحيد، حيث  $h_k \circ q_i = g_i$  من أجل كل  $i$ ، و  $f$  هو  $R$  - هومومرفيزم وحيد، حيث  $f \circ q_k = g_k$  من أجل كل  $k \in K$ . وينتج من ذلك أن:

$$f \circ q_k \circ q_i = g_i \quad \text{من أجل } i \in I_k \text{ و } k \in K \quad (*)$$

ليكن  $f: \bigoplus_{k \in K} (\bigoplus_{i \in I_k} M_i) \rightarrow N$  - هومومرفيزماً آخر يحقق العلاقة (\*), وليكن  
 مقصور  $p'_j: \bigoplus_i M_i \rightarrow M_j$  على  $p_j: \prod_i M_i \rightarrow M_j$  عندئذ، بملاحظة أن  
 $\sum_j (q_j \circ p'_j)$  هو التطبيق المطابق على  $\bigoplus_{j \in J} M_j$ ، نحصل على:

$$\begin{aligned} f' &= \sum_k \sum_{i \in I_k} f' \circ q_k \circ q_i \circ p'_i \circ p'_k \\ &= \sum_k \sum_i g_i \circ p'_i \circ p'_k \\ &= \sum_k \sum_i f \circ q_k \circ q_i \circ p'_i \circ p'_k \\ &= f \end{aligned}$$

وهذا يبرهن أن  $\sum_{k \in K} (\bigoplus_{i \in I_k} M_i)$  بالإضافة إلى الأسرة  $(q_k \circ q_i)_{i \in I_k}$  جداء معاكس للأسرة

□  $(M_i)_{i \in I}$  والإيزومرفيزم المطلوب ينتج الآن من النظرية 10.6.1.

فيما يلي نغطي جل اهتمامنا إلى المجموع المباشر (الجداء المعاكس) لأسرة  $R$  -  
 مودولات، وندرس بعض الخواص لهذا المجموع. وبعبارة أخرى، سوف نعطي هذا  
 المجموع هوية مميزة لما له من الأهمية. لنبدأ بالنظرية.

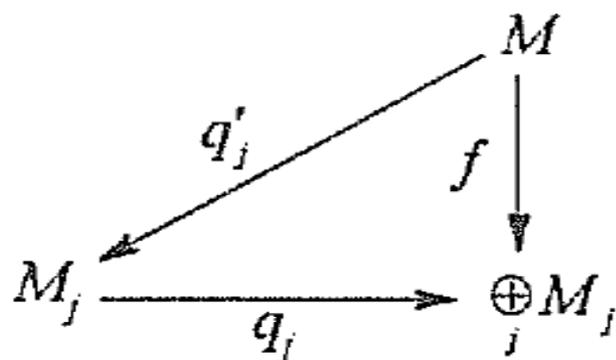
نظرية 13.6.1: لتكن  $(M_i)_{i \in I}$  أسرة  $R$  - مودولات و  $q'_j: M_j \rightarrow M$  -  
 هومومرفيزماً. عندئذ،  $(M, (q'_i))$  جداء معاكس للأسرة  $(M_i)$   $\Leftrightarrow$  توجد أسرة  $R$  -  
 هومومرفيزمات  $(p'_i)_{i \in I}$ ، حيث  $p'_j: M \rightarrow M_j$  يحقق ما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } j = k \\ \text{إذا كان } j \neq k \end{array} \right\} \begin{array}{l} id_M \\ 0 \end{array} = p'_k \circ q'_j \quad (1)$$

(2) من أجل كل  $M \ni m$ ،  $p'_j(m) = 0$  ما عدا من أجل عدد محدد  $I \ni j$

$$\text{و } \sum_{j \in I} (q'_j \circ p'_j)(m) = m$$

- البرهان: لنفرض أن  $(M, (q'_i))$  جداء معاكس لـ  $(M_i)$ . عندئذ يوجد  $R$ -  
 ايزومرفيزم وحيد  $f: \bigoplus_i M_i \rightarrow M$ ، بحيث يكون من أجل كل  $I \ni z$  المخطط:



تبديلياً. من أجل كل  $I \ni z$  نعرف  $p'_j: M \rightarrow M_j$  بالعلاقة:

$$p'_j = p_j \circ f^{-1}$$

حيث  $p_j: \bigoplus_i M_i \rightarrow M_j$  هو مقصور  $\bar{p}_j: \prod_i M_i \rightarrow M_j$  على  $\bigoplus_i M_i$ . عندئذ، من

أجل كل  $I \ni j, k$  لدينا:

$$p'_k \circ q'_j = p_k \circ f^{-1} \circ q'_j = p_k \circ q_j = \begin{cases} id_{M_j}, & j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$$

أضف إلى ذلك، من أجل كل  $M \ni m$ ، يتبين من المساواة:

$$p'_j(m) = (p_j \circ f^{-1})(m) = p_j(f^{-1}(m))$$

أن  $p'_j(m)$  يساوي الصفر ما عدا من أجل عدد محدد  $j \in I$ . وأخيراً:

$$\begin{aligned} \sum (q'_j \circ p'_j) &= \left( \sum_j f \circ q_j \circ p_j \circ f^{-1} \right)(m) \\ &= \left( f \circ \sum_j (q_j \circ p_j) \circ f^{-1} \right)(m) \\ &= m \end{aligned}$$

لأن  $\sum_j (q_j \circ p_j)$  هو تطبيق المطابق على  $\bigoplus_j M_j$ .

بالعكس، نفرض أن الشرطين (1) و (2) في نص النظرية محققان. عندئذ، من

أجل كل  $M \ni m$  نعرف  $g: M \rightarrow \bigoplus_j M_j$  بالعلاقة:

$$g(m) = \sum_j (q_j \circ p'_j)(m)$$