جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الثامنة

في المودولات

الفصل الثاني

المصفوفات

في هذا الفصل نعطي فكرة موجزة وعامة عن المصفوفات وخواصها، وسنجد أنها تعطينا مثالاً هاماً على المودولات، وخصوصاً الحرة منها. كما أنها ستلزمنا في الفصول القادمة.

إن المصفوفة هي بشكل أولي بسيط أسرة عناصر من حلقة ما R مزيلة بدليلين ومرتبة في جدول كما يوضح ذلك التعريف الرسمي الآتي.

2 – 2 تعاريف وأمثلة

لتكن R حلقة ما $I=\{1,2,\cdots,m\}$ و $J=\{1,2,\cdots,n\}$. يسمى التطبيق:

$$f: I\times J \longrightarrow R$$

مصفوفة فوق R. إذا كان $f(i,j)=a_{ij}$ فإننا نرمز لـــ f بالرمز المختصر (a_{ij})، $I\ni i$ و $J\ni j$، أو بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وذلك بكتابة عناصر الأسرة $(I \ni a_{ij}; i, J \ni j)$ في جدول مؤلف من m (عدد عناصر I) سطراً وكل سطر يحوي n (عدد عناصر J) عنصراً [أو مؤلف من n (عدد عناصر J) عموداً وكل عمود يحوي m (عدد عناصر I) عنصرا]. عندئذ يكون عدد عناصر هذا الجدول هو $m \times n = mn$. لذلك يُقال إن المصفوفة هي $m \times n$ – مصفوفة أو من القياس أو الحجم $m \times n$. يُسمى كل عنصر a_{ij} عنصر (محتوى) المصفوفة A الواقع في السطر i والعمود j أو الواقع في المكان (i, j). يجب أن نتذكر دائماً أن كل عنصر a_{ij} من المصفوفة A مزيل بدليلين: أيسر يدل على السطر الواقع فيه هذا العنصر، وأيمن يدل على العمود الواقع فيه a_{ij}.

يرمز لأسطر المصفوفة A بالرموز: $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ، أي أن:

$$A_i = \left[a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in} \right]$$

وبعبارة أخرى، كل سطر A_i من اسطر المصفوفة A هو $1 \times n$ – مصفوفة. قد يرمز لأسطر المصفوفة بالرموز $R_1, R_2, \cdots, R_m$ ؛ حيث R هو الحرف الأول من كلمة Row.

ويرمز لأعمدة المصفوفة A بالرموز $A^1, A^2, \cdots, A^n$ ؛ أي أن:

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

وبعبارة أخرى، كل عمود A^j من أعمدة المصفوفة A هو $m \times 1$ – مصفوفة. قد يرمز لأعمدة المصفوفة A بالرموز $C_1, C_2, \cdots, C_n$ ، حيث C هو الحرف الأول من كلمة Column.

غالباً ما يرمز للمصفوفة A بالرمز المختصر $A=\left[a_{ij}\right]$. وقد يستخدم أيضاً الرمز $A=(a_{ij})$. يمكن كتابة المصفوفة A بدلالة أسطرها بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

أو بدلالة أعمدتها بالشكل:

$$A=\left[A^1 A^2 \cdots A^n\right]$$

يرمز لمجموعة المصفوفات من القياس $m\times n$ فوق الحلقة R بأحد الرموز $M_{m,n}(R)$، $M_{m\times n}(R)$، $R_{m,n}$ أو $R^{m\times n}$.

يجب أن نتذكر دائماً، عند كتابة a_{ij}، أن i يدل على السطر ذي الرتبة i، و j يدل على العمود ذي الرتبة j، الواقع عند تقاطعهما العنصر a_{ij}.

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ من $M_{m,n}(R)$، فإنه يرمز للعنصر a_{ij} أيضاً بالرمز $(A)_{ij}$ أو بالرمز $\mathrm{ent}_{ij}(A)$.

إذا كان $m=n$، فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة مربعة من القياس n، أي أن المصفوفة المربعة هي $n\times n$ – مصفوفة (عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة). تسمى العناصر $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ في المصفوفة المربعة A عناصر قطرية (عناصر القطر الرئيس)، بينما تسمى العناصر $a_{1n},a_{2n-1},\cdots,a_{n1}$ عناصر القطر الثانوي. يسمى مجموع عناصر القطر الرئيس، أي المجموع $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$، اثر المصفوفة A ويرمز له بالرمز $\mathrm{Tr}(A)$، أي أن:

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة من القياس n، و $a_{ij}=0$ من أجل $i\neq j$، فإن A تسمى مصفوفة قطرية، ويرمز له بالرمز:

$$A = diag\left[a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\right]$$

إذا كانت A مصفوفة قطرية و $a = a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$، فإن A تسمى مصفوفة سلمية. وإذا كانت مصفوفة سلمية، وهذه السلمية تساوي واحد الحلقة R، فإن A تسمى مصفوفة الواحدة، ويرمز لها بالرمز I_n أو بالرمز I فقط إذا لم يؤدي ذلك إلى أي التباس. إذا"، $ent_{ij}(\mathrm{I}_n) = \delta_{ij}$ حيث δ_{ij} دلتا كرنيكر.

إذا كانت $M_{m,n}(R) \ni A = \left[a_{ij}\right]$، فإن المصفوفة الناتجة من A بجعل أسطرها أعمدة في المصفوفة الجديدة (أو بجعل أعمدتها أسطراً في المصفوفة الجديدة) منقول A ويرمز لها بالرمز A^t أو بالرمز A'. يجب أن نلاحظ (ونتذكر دائماً) أن منقول $M_{m,n}(R) \ni A$ هو مصفوفة $M_{n,m}(R) \ni {}^tA$.

نُعرف على $M_{m,n}(R)$ عملية جمع "+" بالشكل التالي:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

بسهولة نجد أن $(M_{m,n}(R),+)$ زمرة تبديلية واحدتها $0_{m,n}=0$، مصفوفة من القياس $m\times n$ جميع عناصرها تساوي $0\in R$، ونظير A هو $-A$، حيث: $-A=(-a_{ij})$. ليكن الآن $c\in R$. نُعرف الجداء A بالسلمية c من اليسار بالعلاقة:

$$cA=\left[ca_{ij}\right],\left[\mathrm{ent}_{ij}(cA)=c\,\mathrm{ent}_{ij}(A)\right]$$

وبالشكل نفسه نُعرف الجداء A بالسلمية c من اليمين بالعلاقة:

$$Ac=\left[a_{ij}c\right],\left[\mathrm{ent}_{ij}(Ac)=\mathrm{ent}_{ij}(A)c\right]$$

إن عمليتي الجداء السابقتين تحولان الزمرة $M_{m,n}(R)$ إلى R – مودول أيسر وإلى R – مودول أيمن على الترتيب. وبعبارة أخرى، إن $M_{m,n}(R)$ هي (R,R) – ثنامودول (R – مودول يساري R – مودول يميني) و:

$$(cA)d=c(Ad),\quad \forall c,d\in R$$

إن عملية جمع المصفوفات وعملية جدائها بسلميات هما عمليتان تجميعيتان بشكل طبيعي، وذلك باعتبار المصفوفة A كتطبيق $I \times J \to R$، أي أن عمليتي جمع المصفوفات وجدائها بسلميات توافقان جمع التطبيقات الخطية وجدائها بسلميات والذي سندرسه مستقبلا، وبالرغم من أن جداء المصفوفات يتوافق مع جداء التطبيقات الخطية والذي سندرسه مستقبلاً، لكننا نُعطي الآن تعريفا لجداء المصفوفات بعلاقة واضحة: نستطيع تعريف جداء المصفوفة $M_{m,n}(R) \ni A$ والمصفوفة $M_{n,p}(R) \ni B$ فنحصل على المصفوفة $M_{m,p}(R) \ni AB$ (لاحظ الترتيب) حيث AB مُعرّفة بالعلاقة:

$$\mathrm{ent}_{ij}(AB) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ent}_{ik}(A)\mathrm{ent}_{kj}(B)$$

إذا كانت $A = [a_{ik}]$ و $B = [b_{kj}]$ (بالترتيب AB) من الضروري أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B. أضف إلى ذلك، أن العلاقة المعرفة للجداء AB تتضمن فقط السطر A_i من A والعمود B^j من B. ولذلك، يمكن التعبير عن علاقة الجداء بالشكل:

$$c_{ij} = (C)_{ij} = A_i B^j = (AB)_{ij}$$

حيث جداء مصفوفة سطر بمصفوفة عمود هو:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

نجمع خواص عمليات جمع المصفوفات، جدائها بسلميات، وجدائها في النظرية الآتية تاركين برهانها للقارئ كتمرين ورتيني سهل.

نظرية 1.2.2: إن جداء المصفوفات:

$$M_{m,n}(R) \times M_{n,p}(R) \longrightarrow M_{m,p}(R)$$

يحقق الخواص الآتية:

(1) $A(B+C)=AB+AC$ ؛

(2) $(A+B)C=AC+BC$ ؛

(3) $a(AB)=(aA)B$ ؛

(4) $I_mA=A$ و $AI_n=A$ ؛

(5) $(AB)_i=A_iB$ ؛

(6) $(AB)^j=AB^j$

(7) إن تطبيق الجداء:

$$M_{m,n}(R)\times M_{n,p}(R)\times M_{p,q}(R)\longrightarrow M_{m,q}(R)$$

يحقق قانون التجميع: $A(BC)=(AB)C$

(8) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ ، ${}^t(aA)=a\,{}^tA$ ، ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ ؛

(9) $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ ، $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB)=\mathrm{Tr}(A)$.

هذه الخواص محققة من أجل كل المصفوفات A، B و C المناسبة، أي أن جميع الجداءات الواردة في العلاقات السابقة مُعرّفة، ومن أجل كل $a\in R$.

البرهان: تمرين سهل. □

لتكن $M_{m,n}(\mathbb{C}) \ni A = \left[a_{ij}\right]$. إن المصفوفة المرافقة لـ A هي مصفوفة من نفس قياس A، يرمز لها بالرمز $\overline{A}$، وعناصرها (محتواها) في المكان (i,j) هو $\overline{a}_{ij}$، مرافق a_{ij}. يرمز لمنقول مرافقة A، أي لـ ${}^t\overline{A}$، بالرمز A^*، أي أن $A^* = {}^t(\overline{A})$.

يقال إن المصفوفة $M_{m,n}(\mathbb{C}) \ni A = \left[a_{ij}\right]$:

تناظرية إذا كان ${}^tA = A$،

هيرميتية إذا كان $A^* = A$،

نظامية إذا كان $A^*A = AA^*$،

وحدية إذا كان $A^*A = AA^* = I$،

قائمة (متعامدة) إذا كان ${}^tAA = A{}^tA = I$.

إن مصفوفة جزئية في مصفوفة معطاة هي جدول (قائمة) من عناصر المصفوفة واقع على مجموعة جزئية خاصة من الأسطر والأعمدة للمصفوفة المعطاة، مثلا:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة جزئية في المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ i & 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & \pi & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

واقعة على السطرين الأول والثاني والعمودين الثالث والرابع. إذا أخذنا:

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix},\ B = {}^{t}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A=\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

إن الطرف الأيمن من هذه المساواة يسمى الشكل البلوكي أو الشكل المجزأ للمصفوفة A.

إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن $M_n(R)$ (مجموعة $n\times n$ – مصفوفة فوق R) تشكل حلقة بواحدة I_n، لأن جداء المصفوفات معرف دائما على $M_n(R)$. تسمى الحلقة $M_n(R)$ حلقة المصفوفات المربعة من القياس n فوق R. هذه الحلقة تعطي مثالا على حلقة غير تبديلية، لأن جداء المصفوفات غير تبديلي بشكل عام، حتى ولو كانت R حلقة تبديلية، كما يمكن التأكد من ذلك بكل سهولة.

إن التطبيق $a\mapsto aI_n$ يُعرّف هومومرفيزم حلقات من R إلى $M_n(R)$. إن $M_n(R)$ جبر فوق R بالنسبة إلى الهومومرفيزم السابق.

ملاحظة: إن محتوى هذه النظرية هو أن $M_{n,n}(R)$ هو $M_n(R)$ - مودول يساري و $M_n(R)$ - مودول يميني. كما أن $M_n(R)$ هو R - جبر إذا كانت R حلقة تبديلية؛ ونلاحظ أيضاً أن Tr هو هومومرفيزم R - مودولات. تسمى المصفوفة $S^{-1}AS$ مصفوفة مشابهة لـ A بالنسبة إلى المصفوفة غير الشاذة S، أي أن $S \in GL_n(R) = GL(n,R)$، مجموعة المصفوفات غير الشاذة فوق R.