



جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر
كتاب البنى الجبرية ٣
(المودولات)
د. محمد حسن الهوشي
منشورات جامعة تشرين
سوريا

المحاضرة التاسعة

في المودولات

2 - 3 مصفوفة الواحدة والمصفوفات الأولية

لتكن R حلقة بواحدة I . يوجد mn مصفوفة $E_{ij} \in M_{m,n}(R)$ هامة جداً في كثير من الحسابات المتعلقة بالمصفوفات. نعرف E_{ij} بالعلاقة:

$$\text{ent}_{kl}(E_{ij}) = \delta_{ki}\delta_{lj}$$

أي أن E_{ij} هي $m \times n$ - مصفوفة، جميع عناصرها معدومة ماعدا العنصر الواقع في المكان (j, i) فهو I .

ملاحظة: إن الرمز E_{ij} لا يحوي أية إشارة تدل على المجموعة $M_{m,n}(R)$ التي ينتمي إليها العنصر E_{ij} . إن ذلك يفهم من النص.

يوجد قانون جداء المصفوفات E_{ij} التالي (عندما يكون الجداء معدوم):

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

إذا كان $n = m$ ، فإن $E_i^j = E_j^i$ ، وعندما $n < m$ ، فإن $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$ ، في حين أن $E_{ij}E_{ji} = 0$. لذلك، إذا كان $n < m$ ، فإن الحلقة $M_n(R)$ غير تبديلية، وتوجد فيها قواسم الصفر. تسمى المصفوفة E_{ij} مصفوفة واحدة، لكنها ليس وحدة في الحلقة $M_n(R)$ ما لم يكن $n = 1$. إن وحدات الحلقة $M_n(R)$ هي المصفوفات غير الشاذة (القلوية). تسمى مجموعة المصفوفات القلوية في $M_n(R)$ الزمرة الخطية من الدرجة n ويرمز لها بالرمز $GL_n(R)$ أو بالرمز $GL(n, R)$. إن الفرضية الآتية تعطينا خواص المصفوفة E_{ij} .

فرضية 1.3.2: فرضية 1.3.2: أسرة مصفوفات واحات في

: عدد $M_n(R)$ $\ni A = [a_{ij}] \in M_n(R)$

$$: E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il} \quad (1)$$

$$: I_n = \sum_{i=1}^n E_{ii} \quad (2)$$

$$: A = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^n E_{ij} a_{ij} \quad (3)$$

$$. E_{ii} A E_{kl} = a_{jk} E_{il} \quad (4)$$

البرهان: تمرير.



ملاحظة: عندما نتكلم عن مصفوفات واحدات نعني بشكل عام المصفوفات $M_n(R)$. ومع ذلك، من أجل m و n توجد مجموعة مصفوفات واحدات $\{E_{ij}\}$ ، حيث E_{ij} تحوي 1 في المكان (i,j) وصفر في الأماكن الأخرى، عندئذ تكون $\{E_{ij}\}$ قاعدة للمدول $M_{m,n}(R)$ فوق R ، وذلك باعتباره R - مودولاً يسارياً و R - مودولاً يمينياً في آن واحد.

لقد وجدنا أن $M_n(R)$ حلقة. لنعين مركز هذه الحلقة. نذكر أن، المصفوفة السلمية A هي مصفوفة من الشكل $A = aI_n$. إن مجموعة المصفوفات السلمية في $M_n(R)$ شكل حلقة جزئية في $(M_n(R), +, \cdot)$ ، والتقابل $a \mapsto aI_n$ يُعرف ليزومرفيزماً من R في $M_n(R)$. إذا كان $C(R)$ مركز R ، فإن:

$$(aI_n)A = A(aI_n)$$

من أجل كل $v: R \rightarrow M_n(R)$. ليكن $M_n(R) \ni A$ معرفاً بالعلاقة

$$. v(a) = a I_n$$

إن الفرضية الآتية صحيحة.

فرضية 2.3.2: إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن:

$$C(M_n(R)) = v(C(R))$$

فرضية 2.3.2: إذا كانت R حلقة بولونية [1]، فلن:

$$C(M_n(R)) = \mathcal{V}(C(R))$$

أي أن مركز $M_n(R)$ هو مجموعة العصروفات السلمية، حيث هذه المسلميات مأخوذة من مركز R .

البرهان: من الواضح أن $C(M_n(R)) \supseteq \mathcal{V}(C(R))$. ليكن الآن $A \in C(M_n(R))$ وبحسب النظرية 1.2.2، (5) و (6) يكون:

$$(AE_{ij})^k = A(E_{ij})^k = \delta_{jk}A^l$$

$$(E_{ij}A)_k = (E_{ij})_k A = \delta_{ik}A_j$$

وبمقارنته محتويات هذه الأزواج من المصفوفات (عدها n) نجد أن $a_{ij} = 0$ إذا كان $j \neq s$ و $a_{11} = a_{jj}$. وبما أن زكيفي فإن $A = aI_n$ مصفوفة سلمية. بما أن A يجب أن تكون مترافقه مع جميع المصفوفات السلمية، فإنه ينبع أن $\cdot C(R) \ni a_{11}$.

فيما يلي نعرف أنواعاً خاصة من المصفوفات في $(M_n(R))$ وهي التالية، وللتذكير بشبها جميعاً:

(1) المصفوفات الأولية E_{ij} .

(2) المصفوفات القطرية $(D_n(R))$ ، حيث:

$$D_n(R) = \{A \in M_n(R) : \text{ent}_{ij}(A) = 0, i \neq j\}$$

إذا لمصفوفة قطرية A الشكل $A = \sum_{i=1}^n a_i E_{ii}$ بدلالة مصفوفات الواحدة E_{ii} .

يسعمل أيضاً الرمز $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ للدلالة على المصفوفة قطرية

A . نلاحظ الصيغة الآتية لجداء مصفوفتين قطريتين:

$$\begin{aligned}\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) &= \\ &= \text{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)\end{aligned}$$

(3) المصفوفات السلمية $R \ni a, A = al_n$

(4) المصفوفات المثلثية من الأعلى:

$$T^n(R) = \{A \in M_n(R) : \text{ent}_{ij}(A) = 0, i > j\}$$

(5) المصفوفات المثلثية من الأسفل:

$$T_n(R) = \{A \in M_n(R) : \text{ent}_{ij}(A) = 0, i < j\}$$

(6) من أجل $R \ni \alpha \neq 0$ و $i \neq j$ ، نعرف:

$$T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$$

أي أن $T_{ij}(\alpha)$ تختلف عن I_n فقط في المكان (i, j) حيث عنصر $(T_{ij}(\alpha))$ في هذا المكان هو α ، بينما هو 0 في I_n .

(7) من أجل كل $\alpha \in R$ واحدة في (R) و $1 \leq i \leq n$ ، نعرف:

$$D_i(\alpha) = I_n - E_{ii} + \alpha E_{ii} = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$$

أي أن $D_i(\alpha)$ تختلف عن I_n فقط في المكان (i, i) حيث محتوى $(D_i(\alpha))$ في هذا المكان هو α ، بينما محتوى (I_n) هو 1. يمكن كتابة $D_i(\alpha)$ أيضاً بالشكل

$$D_i(\alpha) = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1)$$

(8) مصفوفة تبديل:

$$P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

أي أن P_{ij} تنتج من المصفوفة I_n بالمباينة بين السطرين i و j (أو بين العمودين i و j). تسمى المصفوفات $(D_i(\alpha), P_{ij}, T_{ij}(\alpha))$ مصفوفات أولية فوق R . بالإضافة إلى هذه الأنواع الخاصة من المصفوفات في $(M_n(R))$ ، والهامة جداً لها من فوائد في الحسابات هناك مصفوفة من الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \left[\begin{array}{cc} u & s \\ v & t \end{array} \right] & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

غير أولية، حيث $\begin{bmatrix} u & s \\ v & t \end{bmatrix}$ هي 2×2 - مصفوفة غير شاذة فوق R .

ربما يساعد المثال الآتي في توضيح الأنواع المختلفة الثلاثة من المصفوفات الأولية:

مثال 3.3.2: نفترض أن $n=3$ و $\alpha \in R$. عندئذ:

$$T_{13}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن الفرضية الآتية تعطي بعض الخواص الأساسية للمصفوفات الأولية.

فرضية 4.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1 :

(1) إذا كان $T_{ij}(\alpha)T_{ij}(\beta) = T_{ij}(\alpha + \beta)$ و $R \ni \alpha, \beta$ ، فإن $j \neq i$

(2) إذا كان $T_{ij}(\alpha)$ قلوبية: $T_{ij}(\alpha) = T_{ij}(\alpha)$ و $i \neq j$ ، فإن $R \ni \alpha$

$$(T_{ij}(\alpha))^{-1} = T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

(3) إذا كان $D_i(\beta)$ قلوبية، و $D_i(\beta) = D_i(\beta)$ و $1 \leq i \leq n$ ، فإن $R^* \ni \beta$

$$(D_i(\beta))^{-1} = D_i(\beta)^{-1} = D_i(\beta^{-1})$$

(4) إن P_{ij} ، وبالتالي P_{ij} قلوبية وتساوي مقلوبها.

البرهان:

(1) من تعريف $T_{ij}(\alpha)$ ومن تعريف جداء المصروفات لدينا:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\alpha)T_{ij}(\beta) &= (I + \alpha E_{ij})(I + \beta E_{ij}) \\ &= I + (\alpha + \beta)E_{ij} \\ &= T_{ij}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

لأن $E_{ij}^2 = 0$ إذا كان $j \neq i$

(2) من (1)، بأخذ $-\alpha = \beta$ نجد:

$$T_{ij}(\alpha)T_{ij}(-\alpha) = T_{ij}(0) \Rightarrow T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

(3) من قانون جداء مصفوفتين قطريتين نجد:

$$\begin{aligned} D_i(\beta)D_i(\beta^{-1}) &= \text{diag}(1, \dots, \beta, \dots, 1)\text{diag}(1, \dots, \beta^{-1}, \dots, 1) \\ &= \text{diag}(1, \dots, \beta\beta^{-1}, \dots, 1) \\ &= \text{diag}(1, \dots, 1, \dots, 1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

(4) لدينا:

$$\begin{aligned} P_{ij}^2 &= (I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})^2 \\ &= I_n + (\text{مجموع حدود معدومة}) = I_n \end{aligned}$$

□

بحسب تعريف جداء المصفوفات وخصائص E_{ij} . يلزمنا التعريفان الآتيان.

تعريف 5.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1، و $\exists A \in M_m(R)$. نعرف الجداء به A من اليسار بالتابع:

$$L_A : M_{m,n}(R) \rightarrow M_{m,n}(R)$$

حيث $L_A(B) = AB$ من أجل كل $B \in M_{m,n}(R)$. وإذا كانت $A \in M_n(R)$ فإننا نعرف الجداء به A من اليمين بالتابع:

$$R_A : M_{m,n}(R) \rightarrow M_{m,n}(R)$$

حيث $R_A(B) = BA$ من أجل كل $B \in M_{m,n}(R)$.

من هذين التعريفين نجد بسهولة أن L_A هو $M_n(R)$ - هومومورفزم مودولات يعني، بينما R_A هو $M_m(R)$ - هومومورفزم مودولات يسرى.

فرضية 6.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1، و $A \in M_{m,n}(R)$. عندئذ:

[$R_{P_{ij}}(A) = AP_{ij}$] $L_{P_{ij}}(A) = P_{ij}A$ (1)
هي المصفوفة الناتجة من A بالمباللة بين السطرين (العمودين) i و j .

(2) إذا كان $R^* \ni \alpha$ واحدة في (R) ، فإن $L_{D_{ij}(\alpha)}(A) = D_{ij}(\alpha)A$

هي المصفوفة الناتجة من A بضم السطر (العمود) i بـ α .

(3) إذا كان $R \ni \alpha$ ، فإن $[R_{T_{ij}(\alpha)}(A) = AT_{ij}(\alpha)] L_{T_{ij}(\alpha)}(A) = T_{ij}(\alpha)(A)$ هي

المصفوفة الناتجة من A بضم السطر (العمود) j بـ α وإضافته إلى السطر

(العمود) i .