



جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر
كتاب البنى الجبرية ٣
(المودولات)
د. محمد حسن الهوشي
منشورات جامعة تشرين
سوريا

المحاضرة العاشرة

في المودولات

البرهان:

(1) لدينا:

$$\begin{aligned} P_{ij} A &= (I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})A = \\ &= A - E_{ii}A - E_{jj}A + E_{ij}A + E_{ji}A \end{aligned} \quad (*)$$

نلاحظ أن:

(a) $E_{ii}A$ هي المصفوفة التي سطرها i هو نفس السطر i للمصفوفة A ، وكل الأسطر الأخرى مساوية للصفر.

(b) $E_{jj}A$ هي المصفوفة التي سطرها j هو السطر j في المصفوفة A ، وكل الأسطر الأخرى مساوية للصفر.

إذًا، (*) تبين أن $P_{ij} A$ هي المصفوفة الناتجة من A بالمبادلة بين السطرين i و j .

(2) لدينا:

$$\begin{aligned} D_i(\alpha)A &= (I - E_{ii} + \alpha E_{ii})A \\ &= A - E_{ii}A + \alpha E_{ii}A \end{aligned}$$

بما أن:

$$E_{ii}A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{i1}, \dots, a_{in} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \text{ السطر } i$$

فإن $D_i(\alpha)A$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر i بـ α .
 (3) لدينا:

$$T_{ij}(\alpha)A = (I + \alpha E_{ij})A$$

بما أن:

$$E_{ij}A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{j1}, \dots, a_{jn} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \text{ السطر } i$$

فإن $T_{ij}(\alpha)A$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر j بـ α وإضافته إلى السطر i .
 □

2 - 14 العمليات الأولية على المصفوفات

تعريف 1.4.2: لتكن $M_{m,n}(R)$. تسمى الأنماط (الأنواع، النماذج) الثلاثة من العمليات عمليات أولية سطرية (عمودية) أو عمليات أولية على الأسطر (الأعمدة):

(1) المبادلة بين سطرين (عمودين). نرمز بـ $(C_i \leftrightarrow C_j) R_i \leftrightarrow R_j$ لعملية

المبادلة بين السطرين (العمودين) i و j .

(2) جداء عناصر سطر (عمود) ما بعنصر مختلف عن الصفر من R . نرمز بـ

$\alpha(C_i) \alpha R_i$ لعملية جداء السطر (العمود) i بـ α .

(3) جداء عناصر سطر (عمود) ما بـ $R \exists \alpha$ وإضافتها إلى العناصر المقابلة في

سطر (عمود) آخر مختلف. نرمز بـ $(C_i + \alpha C_j) R_i + \alpha R_j$ لعملية إضافة

نظريّة 3.4.2: لتكن R ساحة إيديات رئيّسة و $\exists A \in M_{m,n}(R)$. عندئذ، مكافئة إلى مصفوفة قطرية من الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

حيث $a_i \neq 0$ و $a_1 | a_2 | \dots | a_r$.

البرهان: من أجل كل $a \in R$ نعرف الطول $I(a)$ للعنصر a بأنه عدد العوامل البسيطة الموجودة في تحليل a ، حيث $a = p_1 \dots p_r$ ، حيث p_i عناصر بسيطة في R ، ليس من الضروري أن تكون مختلفة. نأخذ بالتعريف $I(u) = 0$ إذا كان u واحدة في R .

إذا كانت $A = 0$ فلا شيء يحتاج إلى برهان. لذلك نفرض أن $A \neq 0$. لكن a_{ij} عنصراً من عناصر A طوله $I(a_{ij})$ أصغرى بين أطوال عناصر A . بتطبيق العمليات الأولية على أسطر A وعلى أعمدتها يأخذ هذا العنصر المكان $(1, 1)$. لذلك نستطيع أن نفرض أن العنصر المختلف عن الصفر وذا الطول الأصغر من عناصر A هو العنصر k الواقع في المكان $(1, 1)$. لنفرض أن $a_{11} \neq a_{1k}$. بمبادلة العمود الثاني مع العمود k نستطيع أن نفرض أن $a_{11} \neq a_{21}$. لكن $(a_{11}, a_{21}) = g.c.d.(a_{11}, a_{21}) = d$. عندئذ يوجد العنصران $R \ni v, u$ بحيث يكون $d = ua_{11} + va_{21}$. يوجد $R \ni t, s$ بحيث يكون $d = d(us + vt)$. إذا، $a_2 = dt$ و $a_1 = ds$. وبالتالي، يمكن التتحقق من أن:

$$\begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ v & -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والتي تعني أن المصفوفة $\begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix}$ قلوبية. بضرب A من اليمين بالمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix} & 0 \\ & 1 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على مصفوفة سطرها الأول هو:

$$[d \ 0 \ b_{13} \ \dots \ b_{1n}]$$

حيث $|a_{11}| > |d|$.

إذا كان $a_{11}/a_{12} \neq 1$ فإنه بإجراء العملية السطورية (العمودية) الأولية (3) على العمودين الأول والثاني (أو، بشكل مكافئ، بضرب A من اليمين بمصفوفة أولية مناسبة)، نستطيع إرجاع A إلى مصفوفة سطرها الأول أيضاً من الشكل

$$I(a_{11}) > I(d) > \dots > b_{13} > b_{12} > \dots > b_{1n}$$

بالاستمرار بالعمل بهذا الشكل نحصل على مصفوفة مكافئة إلى A ، جميع عناصر سطرها الأول 0 ما عدا محتوى المكان $(1,1)$.

وبالمثل، بإجراء العمليات السطورية الأولية (1) - (3) والعملية غير السطورية بالضرب من اليسار بمصفوفة من النوع (9) نرجع عناصر العمود الأول بعد المكان $(1,1)$ إلى 0، وإما أن تبقى عناصر السطر الأول دون تغيير [أي كلها تساوي 0 ما عدا في المكان $(1,1)$]]، أو ترجع طول محتوى المكان $(1,1)$. في الحالة الثانية نعيد العملية التي أرجعنا بها عناصر السطر الأول بعد المكان $(1,1)$ إلى 0. بما أن $I(a_{11})$ محدود بهذه العمليات (الإرجاعات المترابطة للسطر الأول وللعمود الأول) يجب أن تأتي إلى نهاية. وعندما يتم ذلك، تكون قد أرجعنا A إلى الشكل:

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & A_1 \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

حيث A_1 هي $(m-1) \times (n-1)$ مصفوفة، P_1 هي $m \times m$ مصفوفة، Q_1 هي $n \times n$ مصفوفة، و P_1 و Q_1 قلوبتان.

وبالफنّ توجد مصفوفتان قلوبتان P'_1 و Q'_1 من القياس $(m-1) \times (m-1)$ و $(n-1) \times (n-1)$ على الترتيب، بحيث يكون:

$$P'_1 A_1 Q'_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & A_2 \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

حيث A_2 مصفوفة من القياس $(m-2) \times (n-2)$. لتكن:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_2 \end{bmatrix} \text{ و } P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'_2 \end{bmatrix}$$

$$P_2 P_1 A Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

بالاستمرار بهذا الشكل (أو بالاستقراء بحسب $m+n$)، نحصل على:

$$PAQ = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$$

وأخيراً، نبين أننا نستطيع إرجاع A إلى أكثر من ذلك، بحيث يكون $a_1 | a_2 | \dots | a_r$. لنفرض أن $a_1 \nmid a_2$. بالإضافة للسطر الثاني إلى السطر الأول يصبح السطر الأول بالشكل: $[a_1, a_2, 0, \dots, 0]$. بعد ذلك نستطيع إرجاع طول a_1 . إذا، بارجاعات أخرى، نستطيع فرض أن $a_1 | a_i$ ، بالمثل $a_1 | a_i$ ، $i=3, \dots, r$. بتكرار هذا العمل من أجل a_2 بدلاً من a_1, \dots . وهكذا، نصل أخيراً إلى حالة يكون فيها $a_1 | a_{r+1}$.

□

$i = 1, \dots, r-1$

تعريف 4.4.2: تسمى العناصر الفطرية غير المدعومة للمصفوفة التي لها الشكل الفطري المعطى في النظرية 3.4، العوامل اللامتغيره للمصفوفة A .

يمكن بيان أن العوامل اللامتغيره معينة بشكل وحيد بإهمال الجداء بواحdas، وأن $n \times m$ - مصفوفتين متكافئتان عندما وفقط عندما يكون لهما العوامل اللامتغيره ذاتها. لن نناقش هذه المسألة الآن. قد نناقشها مستقبلاً.

2 - 5 تجزئة مصفوفة

في هذا البند ندرس مفهوم تجزئة مصفوفة إلى مصفوفات جزئية (من قياس أصغر من قياس المصفوفة الأساسية). وهو تقنية تفيد في التحقق من بعض الخواص، التي لا يمكن التتحقق منها عند أخذ جميع محتويات المصفوفة. لذلك نفرض أن

إذا كان $n = n_1 + \dots + n_s$ و $m = m_1 + \dots + m_r$. عندئذ، يمكن النظر إلى A كـ $r \times s$ - مصفوفة جزئية (وحدات، بلوكتات):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

حيث A_{ij} هي $m_i \times n_j$ - مصفوفة فوق R .

هناك تجزئان هامتان للمصفوفة A :

الأولى، وهي تجزئة A بدلالة الأسطر:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

حيث $A \in M_{1,n}(R)$ ، والثانية، وهي تجزئة A بدلالة الأعمدة:

$$A = [A^1 \ \dots \ A^n]$$

حيث $.M_{m,1}(R) \ni A^j$

لدرس الآن جداء مصفوفتين مجزأتين. لذلك نفرض أن:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{st} & \dots & B_{sr} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

مصفوفتان مجزأتان. والسؤال: هل يمكن حساب الجداء $C = AB$ لمصفوفة مجزأة، $C = [C_{ij}]$ حيث $C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$ ؟ والجواب نعم. بفرض جميع الجداءات معرفة. في الحقيقة، القسمان (5) و (6) من النظرية 1.2، هما حالة خاصة لهذا النوع من الجداء، لأن التجزئة نتاج عن تجزئة الأسطر والأعمدة. وبشكل خاص فإن المساواة $(AB)_i = A_i B$ من النظرية 1.2.2، (5) تترجم بلغة جداء المصفوفات المجزأة إلى:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix}$$

بينما المساواة $(AB)^j = AB^j$ من نفس النظرية [القسم (6)] فترجم بلغة جداء المصفوفات إلى:

$$AB = A \begin{bmatrix} B^1 & \cdots & B^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB^1 & \cdots & AB^r \end{bmatrix}$$

بالنسبة إلى جداء مصفوفات مجزأة، في الحالة العامة، توجد القاعدة العامة الآتية.

فرضية 1.5.2: لتكن $M_{n,p}(R) \ni B$ و $M_{m,n}(R) \ni A$. نفترض أن $A = [A_{ij}]$ ، $p = p_1 + \cdots + p_u$ و $n = n_1 + \cdots + n_t$ ، $m = m_1 + \cdots + m_s$ ونفترض أن $M_{n_i, p_i}(R) \ni B_{ij}$ ، $M_{m_i, n_j}(R) \ni A_{ij}$ بينما $B = [B_{ij}]$ مجزأان بحيث يكون $C = AB$ بالشكل $C = [C_{ij}]$ حيث $C_{ij} = \sum_{k=1}^r A_{ik} B_{kj}$.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^r A_{ik} B_{kj}$$

البرهان: لِيَكُن $1 \leq \beta \leq p$ ، $1 \leq \alpha \leq m$ و $1 \leq \tau \leq n$. عَدْدًا:

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\tau=1}^n a_{\alpha\tau} b_{\tau\beta} \quad (1)$$

فِي تَجْزِئَة C الْمُعْطَى بـ $p = p_1 + \dots + p_u$ و $m = m_1 + \dots + m_s$ لَدِينَا $M_{m_i, p_i}(R) \ni C_{ij}$ فِي المَصْفُوفَة الْجَزِئِيَّة $c_{\alpha\beta} = \text{ent}_{\alpha\beta}(C)$ وَبِالْتَّالِي، B^β و A_α إِذَا لَدِينَا تَجْزِئَة لـ $A_\alpha = [A_{\alpha 1} \ \dots \ A_{\alpha n}]$ حِيثُ $c_{\alpha\beta} = \text{ent}_{\alpha\beta}(A_\alpha)$ بِالشَّكْل:

$$A_\alpha = [(A_{\alpha 1})_\beta \ \dots \ (A_{\alpha n})_\beta]$$

$$B^\beta = \begin{bmatrix} (B_{1j})^r \\ \vdots \\ (B_{nj})^r \end{bmatrix}$$

من المعادلة (١) نستنتج أن:

$$\text{ent}_{\omega r}(C_{ij}) = \text{ent}_{\alpha\beta}(C)$$

$$= \sum_{\gamma=1}^n a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{n_1} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} + \cdots + \sum_{\gamma=1}^{n_r} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}$$

$$= \text{ent}_{\omega r}(A_{i1}B_{1j}) + \cdots + \text{ent}_{\omega r}(A_{ir}B_{rj})$$

□

وبذلك يتم برهان المطلوب.