



جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات ( مقاسات )

المصدر  
كتاب البنى الجبرية ٣  
( المودولات )  
د. محمد حسن الهوشي  
منشورات جامعة تشرين  
سوريا

# المحاضرة الثانية عشر

# في المودولات



# الفصل الثالث

# التمويلات الصحيحة

ما هي الشرط التي يجب تطبيقها حتى يوجد  $R$  - مجموع فرضيات مولودات

$$f \circ h = g \quad \text{حيث يكون } h: C \rightarrow B$$

دعونا نحل هذين المثلين عندما تكون  $A, B$  و  $C$  مجموعات؛  $f$  و  $g$  هما  
تطبيقات. إن الحل هو في النظرية الإثباتية.

### نظريّة 1.2.3 :

(أ) إذا كان لدينا المجموعات الثلاث  $A$  و  $B$  و  $C$ ، والتطبيقات  $f: A \rightarrow B$  و  $g: A \rightarrow C$ ، فإن الشرطين الآتيين متكافئان:

$$(1) \text{ يوجد تطبيق } h: C \rightarrow B \text{ بحيث يكون } g = h \circ f.$$

$$(2) \text{ من كل أجل } x, y \in A \text{ ، } g(x) = g(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

(ب) إذا كانت لدينا المجموعات الثلاث غير الخالية  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، والتطبيقات  $f: A \rightarrow B$  و  $g: A \rightarrow C$ ، فإن الشرطين الآتيين متكافئان:

$$(3) \text{ يوجد تطبيق } h: C \rightarrow B \text{ بحيث يكون } g = h \circ f.$$

$$\therefore \text{Im}(f) \subseteq \text{Im}(g) \quad (4)$$

البرهان:

$$\text{لِكُن } (2) \Leftarrow (1) \text{ . عندئذ: } f(x) = f(y) \text{ و } A \ni x, y.$$

$$g(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = (f \circ h)(y) = g(y)$$

(1): نأخذ المجموعة  $B \times C \supseteq \text{Im}(f) \times C$ . نتأمل المجموعة:

$$G := \{(y, z) : y = f(x), z = g(x)\}$$

إن  $G \neq \emptyset$ : من أجل كل  $G \ni (f(x), g(x))$  يكون  $A \ni x$  من أجل كل  $y \in \text{Im}(f)$  يوجد عنصر وحيد  $z \in C$  ينبع  $f(x) = y$ ، إذا كان  $y = z$  نختار  $f(x) = z$ ، ولبرهان وحدانية  $z$ ، نفرض أن  $G \ni (y, z)$  و  $G \ni (y, z')$ . بحسب تعريف  $G$ ، لدينا، من أجل كل  $A \ni x, x'$ :

$$y = f(x) = f(x'), \quad z = g(x) = g(x')$$

وبحسب (2)،  $z = z'$ . لذلك، نستطيع تعريف تطبيق  $t : \text{Im}(f) \rightarrow C$  بالعلاقة:

$$t(f(x)) = g(x), \quad \forall x \in A$$

نعرف الآن التطبيق  $h: B \rightarrow C$  بالعلاقة:

$$\left. \begin{array}{l} y \in \text{Im}(f) \text{ إذا كان } t(y) \\ \text{أي عنصر } c \in C \text{ فيما عدا ذلك} \end{array} \right\} = h(y)$$

عندئذ، من أجل كل  $A \ni x$ ، لدينا:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = t(f(y)) = g(x)$$

إذا،  $f \circ h = g$

لخبرهن الآن تكافؤ (3) و (4).

• لتكن  $f: C \rightarrow B$ ،  $h: B \rightarrow A$ ، حيث  $f \circ h = g$ ، عندئذ، من أجل كل  $x \in C$  لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= (f \circ h)(x) = f(h(x)) \in \text{Im}(f) \\ &\Rightarrow \text{Im}(g) \subseteq \text{Im}(f) \end{aligned}$$

•  $g(x) = f(y_x)$  من أجل كل  $x \in C$  يوجد  $y_x \in B$  بحيث يكون  $(3) \Leftarrow (4)$   
نعرف  $B$  بالعلاقة  $y_x = h(x)$ . إن التطبيق  $h: C \rightarrow B$  يحقق العلاقة:

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(y_x) = g(x)$$

□ . إذا،  $f \circ h = g$

### نتيجة 2.2.3:

(أ) إذا كانت  $A$  و  $B$  مجموعتين غير خاليتين و  $f: A \rightarrow B$  تطبيقاً ما، فإن  
الفرضيات الآتية متكافئة:

(1)  $f$  متباين (مونومرفيزم، إدخال);

(2) يوجد تطبيق  $g: B \rightarrow A$  بحيث يكون  $g \circ f = i_A$ ؛

(3)  $f$  خزول من اليسار، أي أنه، من أجل كل مجموعة غير خالية  $C$ ، وكل  
التطبيقات  $:h, k: C \rightarrow A$

$$f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$$

(ب) إذا كانت  $A$  و  $B$  مجموعتين غير خاليتين و  $f: A \rightarrow B$  تطبيقاً ما، فإن

الفرضيات الآتية مكافئة:

(1)  $f$  غامر (إسيمورثيزم)

(2) يوجد تطبيق  $g: B \rightarrow A$  بحيث يكون  $f \circ g = u_g$

(3)  $f$  خرول من اليمين، أي أنه، من أجل كل مجموعة غير خالية وكل التطبيقات

$:h, k: B \rightarrow C$

$$h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$$

البرهان:

•  $g = i_2 \circ C = A$  (2)  $\Leftrightarrow$  (1) باخذ  $A$  و  $i_2$ .

إذا كان  $f \circ h = f \circ k$  عند ذلك بزركيب  $g$  مع طرفي هذه العلاقة

من البطل، وللستخدم العلاقة  $i_1 = g \circ f$  نجد أن  $k = h$ .

$\Leftarrow$  (1): نفرض العكس، أي نفرض أن  $f$  ليس متباعدة. علنذاً، من أجل  $x, y \in A$  ما،  $y \neq x$ ، يكون  $f(x) = f(y)$ . لتكن  $C$  مجموعة كافية غير خالية، ولتكن  $h, k : C \rightarrow A$  تطبيقيان معينين معرفين بالعلاقتين  $x = h(c)$  و  $y = k(c)$  من أجل كل  $c \in C$ ، علنذاً، من الواضح أن  $h \neq k$  و:

$$\begin{aligned} f(h(c)) &= f(x) = f(y) = f(k(c)) \\ \Rightarrow f \circ h &= f \circ k \end{aligned}$$

إذًا، إذا لم يتحقق الشرط (1) فإن الشرط (3) لا يتحقق أيضًا، وهذا يكفي أن  $\Leftarrow$  (1)  $\Leftarrow$  (3).

$(1') \Leftrightarrow (2')$ : ينتج مباشرةً من تكافؤ (3) و (4) في النظرية 1.2.3.

$(2') \Leftrightarrow (3')$ : إذا كان  $h \circ f = k \circ f$ ، فإنه بتركيب  $g$ ، من اليمين مع طرفي هذه العلاقة، واستخدام العلاقة  $j_B = f \circ g$ ، نجد أن  $h = k$ .

$(1') \Leftrightarrow (3')$ : إذا كانت  $B$  وحيدة العنصر، فإن  $f$  غامر بشكل آلي (أتوهاتيكي) ولا شيء يحتاج إلى برهان. لذلك، نفرض أن  $B$  تحوي، على الأقل، عنصرين مختلفين  $a$  و  $b$ . ليكن  $h, k : B \rightarrow B$  معرفتين بالشكل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } x \\ \text{إذا كان } x \\ \text{فما عدا ذلك} \end{array} \right\} = k(x) ; \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } x \\ \text{إذا كان } x \\ \text{فما عدا ذلك} \end{array} \right\} = h(x)$$

عندما من أجل كل  $y \in A$  يكون:

$$h(f(y)) = f(y) = k(f(y)) \Rightarrow h \circ f = k \circ f$$

وبنطبيق (3) نجد أن  $h = k$ .

إذا كان الآن  $(f : B \supseteq \text{Im}(f) \rightarrow B)$  فإنه يوجد  $x$  و  $a \in \text{Im}(f)$ . من أجل هذا

عنصر نحصل، عندما على  $k(x) = b$  و  $h(x) = a$ ، وبما أن  $h = k$ ، فإن  $b = a$ .

وهذا تناقض. إذًا،  $\text{Im}(f) = B$  و  $f$  غامر.

□

ربما يتوقع أحدها أن النظرية 1.2.3 و نتيجتها يمكن تطبيقهما في نظرية المودولات بعد استبدال عبارة "مجموعة غير خالية" بعبارة " $R$  - مودول" و "التطبيق" بـ " $R$  - هومومورفизм مودولات". لكن المثالين المتعاكسين الآتيين يبينان أن هذا التوقع في غير محله.

**مثال 2.2.3: (معاكس):** لنتأمل مخطط  $\mathbb{Z}$  - مودولات و  $\mathbb{Z}$  - هومومورفزمات مودولات:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \\ \times z \downarrow & & \\ \mathbb{Z} & & \end{array}$$

حيث  $id_{\mathbb{Z}}$  التطبيق المتجانس، و  $\times z$  هو  $\mathbb{Z}$  - هومومورفزم معرف بالعلاقة  $n \mapsto 2n$ . على الرغم من أنه، بحسب النظرية 1.2.3، يوجد هومومورفزم  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ، حيث  $h \circ (\times z) = id_{\mathbb{Z}}$ ، فإنه لا يوجد مثل هذا الهومومورفزم. لأنه، إذا فرضنا وجود مثل هذا الهومومورفزم  $h$ ، فإنه من أجل كل  $n \in \mathbb{Z}$  يجب أن يكون  $n = h(2n) = 2h(n)$ ، وهذا يشكل خاص، إذا كان  $1 = n = 1$ . هذا مستحيل، لأن المعادلة  $2x = 1$  ليس لها حل في  $\mathbb{Z}$ .

**مثال 4.2.3 (معاكس):** من أجل كل عدد بسيط  $p$ , نتأمل الزمرة الجزئية  $\mathbb{Q}_p$  في

$\mathbb{Q}$  المعطاة بالشكل:

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : x = \frac{k}{p^n} \right\}$$

نلاحظ أن  $\mathbb{Z}$  زمرة جزئية في  $\mathbb{Q}_p$ ، وبالتالي، نستطيعأخذ عامل الزمرة  $\mathbb{Z}$ .

لنتأمل الآن مخطط  $\mathbb{Z}$ -موللات و  $\mathbb{Z}$ -هومومورفيزمات موللات:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z} & & \\
 \downarrow id & & \\
 \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}
 \end{array}$$

حيث  $id$  هو تطبيق المطابق، و  $f$  هو  $\mathbb{Z}$  - هومومرفيزم مودولات، مُعرف بالعلاقة  $x \mapsto px$ . بما أنه من أجل كل  $k$  وكل  $n$ ، لدينا  $kp^{-n} + \mathbb{Z} = kp^{-n-1} + \mathbb{Z}$ ، فإننا نجد أن  $\text{Im}(f) = \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z} = \text{Im}(id)$  بحسب النظرية 1.2.3 (ب). يوجد تطبيق  $h: \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}$  بحيث يكون  $h \circ f = id$ . ومع ذلك، لا يوجد مثل هذا  $\mathbb{Z}$  - هومومرفيزم. لأنه، إذا فرضنا وجود مثل هذا  $\mathbb{Z}$  - هومومرفيزم  $h$ ، يجب أن نحصل على:

$$\begin{aligned}
 p^{-1} + \mathbb{Z} &= f(h(p^{-1} + \mathbb{Z})) = p(h(p^{-1} + \mathbb{Z})) \\
 &= h(p(p^{-1} + \mathbb{Z})) = h(0 + \mathbb{Z}) = 0 + \mathbb{Z} \\
 \Rightarrow p^{-1} &\in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

وهذا مستحيل.

بالرغم من المثالين المعاكسين السابقين هناك بعض الحالات تُعطى فيها شروط إضافية، نحصل على ما يشبه النظرية 1.2.3 بالنسبة إلى المودولات. إن النتيجتين الآتيتين تشيران إلى هذه الوضعية. وسوف نرى حالات أخرى مؤخرًا.

**نظرية 5.2.3:** لتأمل المخطط:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & C \\
 f \downarrow & & \\
 B & & 
 \end{array}$$

المؤلف من  $R$  - مودولات و  $R$  - هومومورفيزمات مودولات، حيث  $f$  غامر (إيمورفيزم). إن الفرضيّتين الآتيتين متكافئتان:

.  $h \circ f = g$  ، حيث يكون  $h: B \rightarrow C$  ، يوجد  $R$  - هومومورفزم وحيد (1)  
 $\cdot \text{Ker}(g) \supseteq \text{Ker}(f)$  (2)

أضف إلى ذلك، أن مثل هذا  $R$  - هومومورفزم  $h$  يكون مونومورفزمًا عندما وفقط  
عندما يكون  $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$   
البرهان: (1)  $\Leftarrow$  (2): إذا تحقق (1)، فإنه بحسب النظرية 1.2.2 (أ)، من أجل كل  $x \in A$  لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = o_B &\Rightarrow g(x) = h(f(x)) = h(o_B) = o_C \\ &\Rightarrow \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g) \\ &\Rightarrow \text{الشرط } (2) \end{aligned}$$

من أجل كل  $A \ni x, y$  لدينا: (1)  $\Leftarrow$  (2)

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x) - f(y) = f(x - y) = o_B \\ &\Rightarrow x - y \in \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g) \\ &\Rightarrow g(x - y) = g(x) - g(y) = o_C \\ &\Rightarrow g(x) = g(y) \end{aligned}$$

بحسب النظرية 1.2.3 (أ)، نستطيع تعريف التطبيق  $C \rightarrow B$  حيث يكون  $g = f \circ h$ . بما أن  $f$  غامر، بالفرض، فإنه ينتج بحسب النتيجة 3.2.3، أن  $f$  خزول من اليمين وبالتالي،  $h$  وحيد. بقى أن نبرهن أن  $h$  هو في الحقيقة  $R$  - هومومورفزم.

من أجل كل  $A \ni x, y$ ، لدينا  $h(f(x)) = g(x)$ ، وبالتالي، إذا أعطينا  $y \in R$ ، لدينا، كون  $f$  و  $g$  هما  $R$  - هومومورفزمي مونولات:

$$h(f(x) + f(y)) = h(f(x+y)) = (h \circ f)(x+y)$$

$$= g(x+y) = g(x) + g(y)$$

$$= (h \circ f)(x) + (h \circ f)(y)$$

$$= h(f(x)) + h(f(y))$$

$$h(\lambda(f(x))) = h(f(\lambda x)) = (h \circ f)(\lambda x) = g(\lambda x)$$

$$= \lambda g(x) = \lambda(h \circ f)(x)$$

$$= \lambda(h(f(x)))$$

بما أن  $f$  غامر، فإنه ينتج مباشرةً أن  $h$  هو  $R$  - هومومورفزم.  
وأخيراً، إذا كان  $h$  مونومورفزم، من أجل كل  $A \ni x$  لدينا:

$$h(f(x)) = g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

وبالتالي،  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ . إذا،  $\text{Ker}(f) \supseteq \text{Ker}(g)$   
بالعكس، إذا كان  $\text{Ker}(h) \ni x$ ، لیکن  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ ، بما أن  $f$  غامر،  
فإن  $x \in \text{Ker}(f)$ ، وبالتالي:

$$0 = h(x) = h(f(y)) = g(y) \Rightarrow y \in \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow h \text{ متباين}$$

□