جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الثالثة عشر

في المودولات

نظرية 6.2.3: لنتأمل المخطط:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

المؤلف من R − مودولات و R − هومومرفيزمات مودولات، حيث f هو R − مونومرفيزم. إن الشرطين الآتيين متكافئان:

(1) يوجد R − هومومرفيزم وحيد $h:C\to B$، حيث $f\circ h=g$.

(2) $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(g)$.

أضف إلى ذلك، أن هكذا R − هومومرفيزم h هو إيبيمورفيزم عندما وفقط عندما $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(g)$.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): لدينا من أجل كل $x\in C$:

$$g(x)=(f\circ h)(x)=f(h(x))\in \mathrm{Im}(f)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}(g)\subseteq \mathrm{Im}(f)$$

(2) $\Leftarrow$ (1): بحسب النظرية 1.2.2 (ب)، يوجد تطبيق ما $h:C\to B$ بحيث يكون $f\circ h=g$. بما أن f متباين بالفرض، فبحسب النتيجة 2.2.2، ينتج أن f خزول من اليسار، وبالتالي h وحيد. والآن، من أجل كل $C\ni x$ ، $f(h(x))=g(x)$ ، وبالتالي، بإعطاء أي $C\ni d,c$ وأي $\lambda\in R$ ، لدينا، كون f و g هما $R-$ هومومرفيزمين:

$$\begin{aligned} f(h(c+d)) &= (f\circ h)(c+d)=g(c+d) \\ &= g(c)+g(d)=(f\circ h)(c)+(f\circ h)(d) \\ &= f(h(c))+f(h(d)) \end{aligned}$$

$$f(h(\lambda c))=(f\circ h)(\lambda c)=g(\lambda c)=\lambda g(c)$$

بما أن f متباين، فإننا نستنتج أن:

$$h(\lambda c))=\lambda h(c) \quad \text{و} \quad h(c+d)=h(c)+h(d)$$

إذا، h هو في الحقيقة $R-$ هومومرفيزم.

وأخيراً، إذا كان h غامراً، فمن أجل كل $b \in B$ يوجد $c \in C$، بحيث يكون $b = h(c)$، وبالتالي، $f(b) = f(h(c)) = g(c)$. إذاً، $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$، وبالتالي $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$. بالعكس، إذا كان $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$، فمن أجل كل $b \in B$ يوجد $c \in C$، بحيث يكون $f(b) = g(c) = f(h(c))$، وبالتالي $b = h(c)$، لأن f متباين. إذاً، h غامر. □

في مناقشتنا القادمة سوف نواجه بمسائل يُطلب منّا فيها إيجاد مرفيزم يكمل مخططاً ما معطى، بطريقة ناسبة تماما، كما فعلنا في النظريتين الأخيرتين عند إيجاد ميرفيزم كمل المثلث المعطى بشكل يعبر عنه بكلام تقريبي "بإتباع الأسهم اسي لها نفس المنطلق ونفس المستقر، جميع الطرق متساوية". ولكي نكون أكثر دقة ندخل المفهوم الآتي:

تعريف 7.2.3: إذا أعطينا مخططاً مؤلفا من مجموعات ومرفيزمات بين هذه المجموعة، فإننا نقول إن المخطط تبديلي إذا كانت تراكيب كل التطبيقات من منطلق ما إلى مستقر ما متساوية.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

تبديلي عندما، وفقط عندما، $h \circ f = g$.

والمخطط:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}
$$

تبديلي عندما، وفقط عندما، $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ و $g' \circ \beta = \gamma \circ g$. أي عندما، وفقط عندما، كل من مربعيه تبديلي.

ومن المفاهيم الهامة المرتبطة بالمخططات التبديلية، مفهوم المتوالية الصحيحة، والذي ندخله حالا.

3 – 3 المتواليات الصحيحة

إن مفهوم المتوالية الصحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات وعلاقته بمفاهيم أخرى، مثل المجموع المباشر، الجداء المباشر، الجداء التنسوري، الهومولوجيا، وسواها هو أداة مفيدة جداً في دراسة المودولات. وهناك مفهوم آخر أعمم من المتواليات وهو مفهوم المركبات. إن مفهومي المتواليات والمركبات يلعبان دوراً هاماً في نظرية الهومولوجيا، وأنواع أخرى من العلوم الرياضية الحديثة جداً والعالية جداً! وهذان المفهومان لهما فوائد عديدة في الدراسة المتقدمة وفي حل مسائل كانت تبدو معقدة جداً لدرجة الاستحالة.

وعلى الرغم من أننا لن ندرس نظرية الهومولوجيا في هذا الكتاب، لكننا سوف نعطي تعريف هذين المفهومين، وندرس مفهوم المتوالية الصحيحة بالمقدار الذي يلزمنا في هذا الكتاب.

تعريف 1.3.3: نسمي متوالية من R – مودولات و R – هومومرفيزمات كل مخطط من الشكل:

$$S:\cdots\longrightarrow M_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}M_i\xrightarrow{f_i}M_{i+1}\longrightarrow\cdots,\ i\in\mathbb{Z}$$

تسمى مثل هذه المتوالية صحيحة في M_i إذا كان:

$$\mathrm{Im}(f_{i-1})=\mathrm{Ker}(f_i)$$

من أجل $\mathbb{Z}\ni i$. وتسمى المتوالية (S) صحيحة إذا كانت صحيحة في كل حد من حدودها M_i. وبعبارة أخرى، تسمى المتوالية صحيحة، إذا كانت، في كل مستوي، صور كل هومومرفيزم قادم (وارد) تساوي إلى نواة الهومومرفيزم المغادر (الذاهب، الصادر).

إن المتوالية S قد تكون منتهية وقد تكون غير منتهية، من جهة واحدة أو من جهتين. فمثلاً، يمكن أن تأخذ المتوالية S الشكل:

$$S: 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow \cdots$$

أو الشكل:

$$S: \cdots \longrightarrow M_{-3} \xrightarrow{f_{-3}} M_{-2} \xrightarrow{f_{-2}} M_{-1} \longrightarrow 0$$

أو الشكل:

$$S: 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$$

حيث 0 في كل ما سبق يرمز إلى المودول الصفري $\{0\}$، ولكن $0 \to M_i$ أو $M_i \to 0$ هو R – هومومرفيزم مُعرّف بشكل وحيد.

قد يكون الترقيم بشكل معاكس، مثلا:

$$S : \cdots \longrightarrow M_3 \xrightarrow{f_3} M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \longrightarrow 0$$

تعريف 2.3.3: تُسمى المتوالية S تركيبية إذا كان من أجل كل متوالية من الشكل:

$$M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$$

يتحقق الاحتواء $\mathrm{Ker}(f_i) \supseteq \mathrm{Im}(f_{i-1})$. تُسمى التركيبية S صحيحة إذا كان من أجل كل متوالية من الشكل:

$$M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_i$$

تتحقق المساواة $\mathrm{Ker}(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i-1})$.

ملاحظة: بما أن $\mathrm{Ker}(f_i) \supseteq \mathrm{Im}(f_{i-1})$، فإن $f_i \circ f_{i-1} = 0$ من أجل كل i.

تعريف 3.3.3: إذا كانت S تركيبة، فإن أسرة المودولات:

$$(H_n(S))_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\mathrm{Ker}(f_n) \big/ \mathrm{Im}(f_{n-1})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

تسمى هومولوجيا لـــ S، ويسمى $H_n(S)$ مودول التركيبة S ذا الرتبة n أو n – مودول التركيبة S (أو الهومولوجيا لـــ S).

إن المساواة $H_n(S) = 0$ تعني أن المتوالية S صحيحة في M_n. يسمى كل عنصر من $\mathrm{Im}(f_{n-1})$ حدا من القياس n (أو n – قياسا) للتركيبة S، ويُسمى كل عنصر من $C_n(S) = \mathrm{Ker}(f_n)$ دورا n – قياسا للتركيبة S.

لتكن المتوالية:

$$S : L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{s} N$$

المؤلفة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات. إن صحة هذه المتوالية في M تعني

شيئين: التركيب sot هومومرفيزم صفري ($\operatorname{Ker}(S) \supseteq \operatorname{Im}(t)$) وكل عنصر $m \in M$ حيث $s(m)=0$ هو من الشكل $m=t(l)$ ، $l \in L$ ($\operatorname{Im}(t) \supseteq \operatorname{Ker}(S)$).

نجمع بعض النتائج السابقة في النظرية الآتية والتي ستلزمنا بعد قليل وذلك لسهولة الرجوع إليها.

نظرية 4.3.3: ليكن $f: M \rightarrow M'$ هو هومومرفيزم R – مودولات. ليكن $M \rightarrow 0$ و $0 \rightarrow M$ رمزين لتطبيق الاحتواء والتطبيق الصفري على الترتيب.

عندئذ، يكون f:

(1) مونومرفيزما $\Leftrightarrow$ $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'$ صحيحة.

(2) إيبيمورفيزما $\Leftrightarrow$ $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ صحيحة.

(3) إيزومرفيزما $\Leftrightarrow$ $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ صحيحة.

البرهان:

(1) المتوالية $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'$ صحيحة $\Leftrightarrow$ $\ker(f)=\{0\}$.

(2) المتوالية $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ صحيحة $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f)=M'$.

(3) ينتج مباشرة من (1) و (2). □

إن القول أن المتوالية:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M$$

صحيحة في L يكافئ القول أن $L \to M$ هو مونومرفيزم، بينما القول أن المتوالية:

$$M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

صحيحة في N يكافئ القول أن $M \to N$ هو إيبيمورفيزم.

إن متوالية صحيحة من الشكل:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{s} M \xrightarrow{t} N \longrightarrow 0$$

حيث مودولا الطرفين (وبالتالي هومومرفيزما الطرفين) صفريان، تسمى متوالية قصيرة صحيحة. في هذه الحالة، صحة المتوالية تعني أن s مونومرفيزم، t إيبيمورفيزم، و $\mathrm{Ker}(t)=\mathrm{Im}(s)$.

مثلاً، إذا كان N مودولاً جزئياً في M، فإن تطبيق الاحتواء (الإدخال) $N \to M$ والإسقاط (الهومومرفيزم الطبيعي) $M \to M/N$ معا يؤديان إلى المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

وبإهمال الإيزومرفيزم، كل متوالية قصيرة صحيحة لها هذا الشكل البسيط. لأنه بإعطاء المتوالية:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ s\ } M \xrightarrow{\ t\ } M'' \longrightarrow 0$$

نأخذ في المودول M المودول الجزئي $N = \mathrm{Im}(s)$. عندئذ، صحة المتوالية السابقة تعني كما في الشكل:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(s) \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "t"] & M/\mathrm{Im}(s) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "t'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[u, dashed, "s'"] \arrow[ur, "s"] & & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

إن s هو تركيب الإيزومرفيزم $\mathrm{Im}(s) \xrightarrow{\sim} M'$ والإدخال $M \longrightarrow \mathrm{Im}(s)$، إن هذا المودول الجزئي $\mathrm{Im}(s)$ هو نواة الإيبيمورفيزم t، وكل من التطبيقين القائمين s' و t' في الشكل هو إيزومرفيزم.

ليكن M_1 و M_2 R – مودولين. كل مجموع مباشر $M_1 \oplus M_2$ يؤدي إلى المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

حيث q_1 هو هومومرفيزم احتواء (إدخال) في المجموع المباشر، و p_2 إسقاط للمجموع. في هذه الحالة يوجد مقلوب من اليمين لـ p_2، لأن الإدخال $q_2 : M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ يحقق العلاقة $p_2 \circ q_2 = i_{M_2}$. وبالمثل يوجد مقلوب من اليسار لـ q_1، لأن الإسقاط $p_1 : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1$ يحقق العلاقة $p_1 \circ q_1 = i_{M_1}$.

ليكن M_1 و M_2 R – مودولين و $f:M_1 \to M_2$ هومومرفيزم R – مودولات،

عندئذ، نحصل على المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{\varphi} M_1/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow 0$$

حيث i هو تطبيق الاحتواء (الإدخال) و φ الهومومرفيزم (الإسقاط) الطبيعي. وبالشكل نفسه نحصل على المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1/\mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0$$

ملاحظة: نلاحظ أنه في متوالية صحيحة، تركيب R هومومرفيزمين متتالين هو هومومرفيزم صفري. إن عكس هذه النتيجة غير صحيح في الحالة العامة، لأن $f \circ g = 0$ مكافئة إلى $\mathrm{Ker}(f) \supseteq \mathrm{Im}(g)$. المتتاليات التي فيها $f_i \circ f_{i-1} = 0$ من اجل كل دليل i غالبا ما تسمى متواليات أشباه صحيحة.

لتوضيح المفاهيم السابقة بعض الشيء سوف نُعطي خاصة هامة لنواة R – هومومرفيزم، وهي تنتج من النظرية الآتية.

نظرية 5.3.3: إذا أعطينا مخطط R – مودولات و R – هومومرفيزمات:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

سطره متوالية صحيحة و $g \circ v = 0$، فإنه يوجد R – هومومرفيزم وحيد $h : M \to X$ يجعل المخطط التام تبديلياً.

البرهان: بما أن $g \circ v = 0$ والسطر متوالية صحيحة، فإن:

$$\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$$

وبما أنه، بحسب النظرية 4.3.1، f مونومرفيزم، فإن المطلوب ينتج مباشرة من النظرية 6.2.3. □