$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

يساوي 1 .

وبصورة عامة ، اذا كتبنا المتسلسلة اللانهائية

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots$$

بالصورة المختصرة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أو Σa_n ، فمن المتوقع أن نحسب أولا $a_1 + a_2$ ثم $a_1 + a_2 + a_3$ وهكذا . ونطلق على نقطة تقارب المتتابعة الناتجة ان كانت متقاربة . اسم مجموع المتسلسلة اللانهائية . لاحظ أن

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots\dots$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots\dots$$

تمثلان متسلسلتين لانهائيتين مختلفتين حيث متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة الأولى هي

1, 0, 1, 0, ...

في حين متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة الثانية هي

0, 0, 0, 0, ...

ونلاحظ ان المتتابعة الاولى غيرمتقاربة في حين المتتابعة الثانية تقترب الى ٥ . بعبارة أخرى ، المتسلسلة الأولى ليس لها مجموعا ، بينما مجموع المتسلسلة الثانية يساوة ٥ . ان هذا المثال يبين ان خاصية التجميع لا تصح عند التعامل مع عدد غيرمنته من الحدود . نشير هنا الى اننا لم نعط تقريبا لمفهوم المتسلسلة اللانهائية وكل ما فعلناه اننا اقترحنا طريقة لاقران بعض المتسلسلات مع أعداد حقيقية .

1· المتسلسلات اللانهائية

Infinite Series

فيما يلي سنعطي تقريباً لمفهوم المتسلسلة اللانهائية .
المتسلسلة اللانهائية من الأعداد الحقيقية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots$$

هي عبارة عن المتتابعة الحقيقية $< s_n >$ حيث

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\dots \quad \dots$$
وبصورة عامة
$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

وسنقول ان المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n} a_n$ تقترب او تتقارب (أو متسلسلة متقاربة) اذا كانت المتتابعة $< s_n >$ متقاربة . وفي هذه الحالة ، اذا كانت $s_n \longrightarrow s$ فنقول ان s يمثل مجموع المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ونكتب

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\Sigma a_n \longrightarrow s$$

واذا كانت المتتابعة $< s_n >$ غير متقاربة فنقول ان المتسلسلة Σa_n غير متقاربة (أو متباعدة اوليس لها مجموع) . يطلق على المتتابعة $< s_n >$ احياناً أسم متتابعة المجاميع الجزيئية .

أمثلـــة :

(1) لتكن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a + a r + a r^2 + \dots \dots$$

حيث $a \neq 0$ نسمي هذه المتسلسلة اللانهائية متسلسلة هندسية . ويطلق على العدد r اسم أساس المتسلسلة . نضع

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

اذا كان $r = 1$ ، فمن الواضح أن $s_n = na$ ولهذا فمتتابعة المجاميع الجزئية $< s_n >$ لاتتقارب (لماذا ؟) . أما اذا كانت $r \neq 1$ ، فمن المعلوم أن

$$s_n = \frac{a(1 - r^{n-1})}{1 - r}$$

ولهذا ، اذا كان $1 > |r|$ فأن

$$r^{n-1} \longrightarrow 0$$

وبالتالي

$$s_n \longrightarrow \frac{a}{1-r}$$

اما اذا كان $1 < |r|$ فأن المتتابعة $< r^{n-1} >$ لاتتقارب (لماذا ؟) وبالتالي فالمتتابعة $< s_n >$ لاتتقارب . بناء على ماجاء أعلاه ، نستنتج أن المتسلسلة الهندسية Σa_n^{n-1} غير متقاربة اذا كان $1 \leq |r|$ وتقترب الى $\frac{a}{1-r}$ اذا كان $1 > |r|$. ولهذا فأن

$$\Sigma a r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

(2) لتكن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

تسمى هذه المتسلسلة اللانهائية بأسم المتسلسلة التوافقية . نضع

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

ندعي أن المتتابعة $< S_n >$ غير متقاربة . في الواقع

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

من هذا ينتج أنه اذا كان $1 \leq n , 2n = m$ ، فأن

$$|S_m - S_n| \geq \frac{1}{2}$$

من هذا نستنتج أن المتتابعة $< S_n >$ متتابعة غير أساسية (راجع تعريف المتتابعة الأساسية في الفصل السابق) ، وبالتالي تكون متتابعة غير متقاربة (لماذا ؟) . يتبع من هذا أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ غير متقاربة .

(3) لتكن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

نضع

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

اذا كان k عدداً صحيحاً موجباً ، فأن

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

وهكذا فأن

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

من الواضح الآن ان المتتابعة $< S_n > = < \frac{n}{n+1} >$ متقاربة وان

$S_n \to 1$

وهكذا فان

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

(4) لتكن $< a_n >$ متتابعة حقيقية متناقصة ومتقاربة الى الصفر . وليكن $a_n > 0$ لـكل $n \in N$ نفرض ان

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 \dots$$

متسلسلة لانهائية . (تسمى هذه المتسلسلة متسلسلة متناوبة)
اذا كان n عددا زوجيا ، $n = 2m$ فان

$$S_n = S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

بما ان المتابعة $< a_n >$ متناقصة ، كل من الحدود ($a_{i-1} - a_i$) موجب .
نستنتج من هذا ان المتتابعة $< S_{2m} >$ متزايدة . ومن الجهة الاخرى . باعادة كتابة الحدود اعلاه على النحو التالي :

$$S_{2m} = (a_1 - a_{2m}) - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1})$$

نستنتج ان $S_{2m} \leq a_1$

يتبع من هذا ان المتتابعة $< S_{2m} >$ مقيدة من الاعلى بالاضافة الى كونها متزايدة ينتج من هذا باستخدام المبرهنة 3.2 (الفصل الثاني) . ان المتتابعة $< S_{2m} >$ متقاربة اما اذا كان n عددا فرديا $n = 2m + 1$ ، فنستطيع ان نبرهن باستخدام الطريقة السابقة نفسها ان المتتابعة $< S_{2m+1} >$ متقاربة أيضاً. وعليه فالمتتابعة $< S_{2m+1} - S_{2m} >$ ، التي هي الفرق بين المتتابعتين $< S_{2m+1} >, < S_{2m} >$ ، تتقارب أيضاً . والآن

$$a_{2m+1} = S_{2m+1} - S_{2m}$$

ومن الفرضية

$$a_{2m+1} \to 0$$

لذلك فأن

$$S_{2m+1} - S_{2m} \to 0$$

وهذا يعني أن المتتابعتين $< S_{2m} >$ و $< S_{2m+1} >$ تقتربان الى النقطة نفسها. ينتج من هذا أن المتتابعة $< S_n >$ متقاربة .
كحالة خاصة من المثال السابق ، نستنتج أن المتسلسلة $\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة.

قضية 1.1 اذا كانت كل من Σa_n و Σb_n متسلسلة متقاربة فأن المتسلسلة $\Sigma(a_n + b_n)$ متقاربة أيضاً . بالأضافة الى هذا ، اذا كان $S = \Sigma a_n$

$T = \Sigma b_n$

فأن $\Sigma (a_n + b_n) = S + T$

لكل عدد حقيقي k ، اذا كانت Σa_n متقاربة الى S فأن المتسلسلة Σka_n متقاربة أيضاً ، وأن $\Sigma k_{an} = k_s$.

البرهان : سنترك البرهان المباشر لهذه القضية للطالب كتمرين (استخدم الخواص المناظرة للمتتابعات) .

نتيجة 1.2 : اذا كانت المتسلسلة Σa_n متقاربة وكانت المتسلسلة Σb_n متباعدة فأن المتسلسلة $\Sigma(a_n + b_n)$ متباعدة أيضاً .

ملاحظة : من السهولة أعطاء مثال على متسلسلتين متباعدتين مجموعهما متسلسلة متقاربة .

2. اختبار للتقارب

a converging Test

اختبار للتقارب

من الأسئلة الرئيسية التي تسأل بخصوص أية متسلسلة هي :
هل المتسلسلة متقاربة أم لا ؟ . واذا كانت متقاربة فما مجموعها ؟. القضية التالية تعطي شرطاً ضرورياً للتقارب .

قضية 2.1 : اذا كانت المتسلسلة Σa_n متقاربة ، فان المتابعة $< a_n >$ تتقارب ايضا ونقطة تقاربها هي الصفر .

البرهان : ليكن $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

بما أن المتسلسلة Σa_n متقاربة ، فأن المتابعة $< S_n >$ متقاربة أيضاً . وعليه ، لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k \in N$ بحيث أن $|S_n - S_m| < \varepsilon \ \forall_{n,m} > k$ وبصورة خاصة ، اذا كان $n > k$ فأن

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن

$$a_n \to 0$$

الشرط المنصوص عنه في القضية السابقة غير كاف لتقارب المتسلسلة .

فمثلا المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ غير متقاربة على الرغم من $< \frac{1}{n} >$ تقترب الى الصفر .

القضية التالية تعطي اختبارا جيدا لتقارب او تباعد المتسلسلة التي حدودها غير سالبة .

قضية 2.2 : (اختبار المقارنة) . اذا كانت Σb_n متسلسلة متقاربة وكان
$0 \le a_n \le b_n \qquad \forall n \in N$

فان المتسلسلة Σa_n متقاربة أيضا . من الجهة الاخرى ، اذا كانت المتسلسلة Σb_n متباعدة
وكان $0 \le b_n \le a_n$

فان المتسلسلة Σa_n متباعدة أيضاً .

البرهـــان : نفرض أن

$$\sum_n b_n = T$$

ليكن

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

بما أن الحدود a_i غير سالبة ، فان المتتابعة $< s_n >$ غير متناقصة .
فضلا عن هذا ، بما ان $a_n \le b_n$.
فان المتتابعة $< s_n >$ مقيدة من الاعلى بالمجموع T . من هذا نستنتج ، باستخدام المبرهنة 3.2 (الفصل الثاني) : أن المتتابعة $< s_n >$ متقاربة ونقطة تقاربها لا تزيد عن T وهذا يعني أن المتسلسلة Σa_n متقاربة ومجموعها S لا يزيد عن T .
لبرهان القسم الاخر من القضية ، نفرض أن المتسلسلة Σa_n متقاربة . يتبع من القسم الأول من البرهان أن المتسلسلة Σb_n متقاربة أيضاً . ولكن هذا يناقض الفرضية .
مثال : لكل $n \in N$

$$o < \frac{1}{(h+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$