مستمر في النقطة x_0 في X ، اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ (δ تعتمد على كل من ε و x_0 بصورة عامة) بحيث انه لكل $x \ni X$ اذا كان ،

$$d(x, x_0) < \delta$$

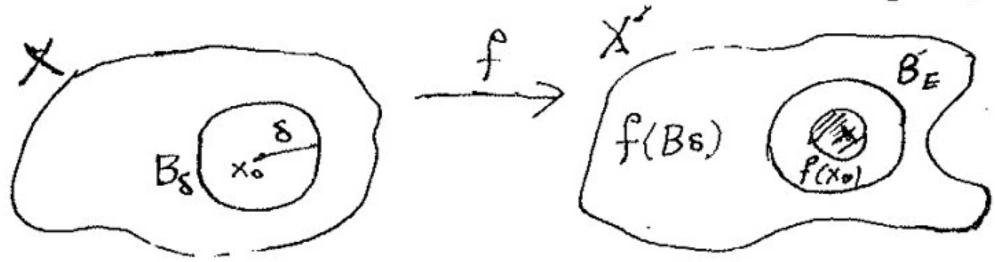
فان

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(لاحظ ان d يرمز الى البعد في X و d' يرمز الى البعد في X') بعبارة اخرى ، يكون التطبيق f مستمرا في x_0 اذا كان لكل كرة B'_ε في X' مركزها $f(x_0)$ ونصف قطرها ε ، يوجد كرة B_δ في X مركزها x_0 ونصف قطرها δ بحيث ان

$$f(B_\delta) \subseteq B'_\varepsilon$$

انظر الشكل .



لابد انك تلاحظ ايها القاريء ان هذا التعريف يصبح نفس التعريف الذي صادفك في دراستك السابقة عندما يكون كل من X , X' هو فضاء الاعداد الحقيقية .

اذا كان

$$f : X \to X'$$

تطبيق وكانت S مجموعة جزئية في X . فيقال أن f مستمر على S اذا كان f مستمراً في كل نقطة x من نقاط S . واذا كانت $S = X$. فيقال أن f مستمر على X أو مستمر (اذا لايوجد التباس) .

القضية التالية تعطي معيارا اخراً للتطبيقات المستمرة . ويمكن استخدام صيغة هذه القضية في تعريف مفهوم الاستمرارية في مجالات اوسع من مجال الفضاءات المترية كما سترى في دراستك المقبلة في موضوع التوبولوجيا .

قضية 1.1 ليكن

$$f : X \to X'$$

تطبيقا. يكون التطبيق f مستمرا اذا وفقط اذا تكون الصورة العكسية بالنسبة الى f لكل

مجموعة مفتوحة في X' ، تكون مجموعة مفتوحة في X . تذكر انه اذا كانت V مجموعة في X' ، فان الصورة العكسية الى V بالنسبة الى f . والتي يرمز لها بالرمز $f^{-1}(V)$ هي

$$f^{-1}(V) = \{ x \varepsilon X \mid f(x) \varepsilon V \}$$

البرهان : ليكن f تطبيقا مستمرا . ولتكن V مجموعة مفتوحة في X' . علينا ان نبين ان $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X . لتكن x_0 نقطة في $f^{-1}(V)$ ولذا فان $f(x_0) \ni V$. بما ان V مجموعة مفتوحة . يوجد كرة B' مركزها $f(x_0)$ وهذه الكرة تقع في V . بما ان f تطبيق مستمر . يوجد كرة B في X مركزها x_0 بحيث ان

$$f(B) \subseteq B' \subseteq V$$

(حسب تعريف الاستمرارية) . وهذا يعني ان .

$$B \subseteq f^{-1}(V)$$

ولذلك فان $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X

والان نبرهن العكس . لتكن $x_0 \ni X$. ولتكن B' كرة في X' مركزها $f(x_0)$

بما ان الكرة مجموعة مفتوحة . فان $f^{-1}(B')$ مجموعة مفتوحة في X (حسب الفرضية) . من الواضح ان $x_0 \ni f^{-1}(B')$. نستنتج من تعريف المجموعة المفتوحة في الفضاءات المترية انه يوجد كرة B في X مركزها x_0 وان $B \subseteq f^{-1}(B')$ اي ان .

$$f(B) \subseteq B'$$

وهذا يبرهن ان التطبيق f مستمر في x_0 .

القضية التالية تبين انه بالامكان استخدام المجموعات المغلقة عوضا عن المجموعات المفتوحة في القضية السابقة

قضية 2-1 – ليكن

$$f : X \to X'$$

تطبيقاً . يكون التطبيق f مستمراً اذا وفقط اذا الصورة العكسية بالنسبة الى f لكل مجموعة مغلقة في X' تكون مغلقة في X .

البرهان : سنترك للطالب أن يستخدم العلاقة الآتية لكي يعطي تفاصيل البرهـــان. لكل مجموعة جزئية V في X .

$$X - f^{-1}(V) = f^{-1}(X - V).$$

القضية التالية توضح العلاقة بين مفهومي التقارب والأستمرارية .

قضيـــة 3·1 – ليكـــن

$$f : X \to X'$$

تطبيقا ، ولتكن x_o نقطة ما في X . يكون التطبيق f مستمراً في x_o اذا وفقط اذا لكل متتابعة $< x_n >$ متقاربة الى x_o في X ، تكون المتتابعة $< f(x_n) >$ متقاربة الـــى $f(x_o)$ في X' .

وبصورة مختصرة فأن

$$\lim_n f(x_n) = f \lim_n (x_n)$$

أي أن « العمليتين » f و lim تتبادلان.

البرهان : نفرض أن التطبيق f مستمر في x_o ونفرض ان المتتابعة $< x_n >$ في X بحيث

$$x_n \to x_o$$

علينا أن نبين أن

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

لتكن V مجموعة مفتوحة في X' تحتوي $f(x_0)$ بما ان التطبيق f مستمر في x_0 ، المجموعة $f^{-1}(V)$ التي تحتوي x_0 هي مجموعة مفتوحة في X « وبما أن المتتابعة $< x_n >$ تقترب الى x_0 ، المجموعة $f^{-1}(V)$ تحتوي على معظم حدود المتتابعة $< x_n >$. من هذا نستنتج أن المجموعة $f(f^{-1}(V)) = V$ تحتوي على معظم حدود المتتابعة $< f(x_n) >$.

للبرهنة على كفاية الشرط المذكور ، نفرض أن التطبيق f غير مستمر في x_o ونكوّن متتابعة $< x_n >$ في X بحيث أن

$$x_n \to x_0$$

بينما

$$f(x_n) \not\to f(x_0)$$

($< f(x_n) >$ لاتقترب الى $f(x_0)$). في الواقع . اذا كان التطبيق f غير مستمر في x_o . يوجد عدد موجب c بحيث أن لكل عدد صحيح موجب n . الكرة $B_{\frac{1}{n}}$ في X التي مركزها x_0 ونصف قطرها $\frac{1}{n}$ لاتقع صورتها في الكرة B'_c في X' التي مركزها $f(x_0)$ ونصف قطرها c . (راجع تعريف الاستمرارية في بداية الفصل) بعبارة اخرى . لكل $n \in N$. يوجد $x_n \in X$ بحيث أن

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$$

بينما

$$d'(f(x_n), f(x_0)) \geq c$$

من الواضح أن المتتابعة $< f(x_n) >$ لاتقترب الى $f(x_0)$ (لماذا ؟) . سنترك للطالب أن يبين – باستخدام خاصية ارخميدس – أن المتتابعة $< x_n >$ تقترب الى x_o ان وجود هذه المتتابعة يناقض الفرضية . نستنتج من وجود هذا التناقض أن التطبيق f مستمر في x_0 .

امثلة 1·4 – :

(1) كل تطبيق ثابت بين فضائين متريين مستمر . (لماذا؟)

(2) اذا كان

$$f : X \to X$$

معرفا على النحو

$$f(x) = x \quad \forall_x$$

فان f تطبيق مستمر . (لماذا؟)

(3) اذا كان

$$f : R \to R$$

معرفاً على النحو

$$f(x) = x^2 \quad \forall_x$$

فان f تطبيق مستمر. في الواقع اذا كانت $x_o \in R$. وكان $\varepsilon > 0$. فان

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\ &= |x - x_o||x + x_o| \end{aligned}$$

اذا كان $\delta \geq 1$ ، وكان

$$|x - x_0| < \delta$$

فان

$$|x| < |x_0| + \delta$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} |x + x_o| &\leq |x| + |x_o| \\ &< 2|x_o| + 1 \end{aligned}$$

وعليه

$$|f(x) - f(x_0)| < |x - x_o)| < |x - x_o|(2|x_o| + 1)$$

والان اذا كان

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_o| + 1}\right\}$$

فان

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(4) ليكن

$$f : R^+ \to R$$

معرف على النحو

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall_x$$

حيث R^+ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة . سنبين أن التطبيق f مستمر في النقطة 2 . ليكن $\varepsilon > 0$ ، علينا أن نجد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان

$$|x - 2| < \delta$$

فان

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

أي نريد أن يكون

$$\frac{|x - 2|}{2x} < \varepsilon$$

اذا أخذنا $\delta \leq 1$. فان

$$\therefore |x - 2| < \delta$$

يؤدي الى

$$|x| > 1$$

وعليه فان

$$\frac{|x - 2|}{2x} < \frac{|x - 2|}{2}$$

ولهذا فمن الممكن اختيار δ أصغر العددين 1 أو 2ε أي

$$\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$$

من السهولة ان نبين ان δ هذه تحقق العلاقة المطلوبة . في الواقع . اذا كانت x بحيث

$$|x - 2| < \delta$$

فأن

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x - 2|}{2x} < \frac{|x - 2|}{2}$$

$$< \frac{\delta}{2} \leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(5) ليكن

$$f : R \to R$$

معرفا على النحو

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

يبين أن الدالة f غير مستمرة في o. الفترة $V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ مجموعة مفتوحة تحتوي على $f(o) = o$. بينما

$$f^{-1}(V) = \{o\}$$

تتكون من نقطة واحدة فقط وهذه المجموعة ليست مجموعة مفتوحة ولا تحتوي على مجموعة مفتوحة غير خالية . وعليه فان الدالة غير مستمرة في النقطة o . (راجع التعريف)

دعنا نبرهن الان أن الدالة f مستمرة في كل النقاط x حيث $x > o$. في الواقع $f(x) = 1$. ولذلك اذا كانت V مجموعة مفتوحة تحتوي على ١ . فان

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} (o,\infty) & -1,0 \notin V \\ [o,\infty) & -1 \notin V,\ o \in V \\ R - \{o\} & 0 \notin V,\ -1 \in V \\ R & -1,0 \in V \end{cases}$$

وفي كل من هذه الحالات ، توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي على x بحيث ان

$$f(u) \subseteq V$$

في الواقع ، اذا كانت $U = (o,\infty)$ فان $x \ni U$ وان

$$f(U) \subseteq V.$$

نبين الان أن الدالة f غير مستمرة في النقطة o باستخدام القضية 1·3 . المتتابعة $< \frac{1}{n} >$ تقترب الى 0 بينما كل حد من حدود المتتابعة $< f(\frac{1}{n}) >$ يساوي 1 ولذلك فان هذه المتتابعة تقترب الى 1 ولا تقترب الى $o = f(o)$. اي أن

$$\lim f(\frac{1}{n}) \neq f \lim (\frac{1}{n})$$

المثال التالي يبين وجود تطبيقات غير مستمرة في جميع نقاط منطلقها .

سنجد اهمية هذا المثال عند دراسة موضوع التكامل .

(6) لتكن

$$f : [a,b] \to R$$

معرفة على النحو

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اذا كان } x \text{ عددا نسبيا} \\ 2 & \text{اذا كان } x \text{ عددا غير نسبي} \end{cases}$$

الدالة f غير مستمرة في كل النقاط x . اذا كان x_o عددا نسبيا . يوجد متتابعة $< x_n >$ من الاعداد غير النسبية التي تقترب الى x_o . (لماذا ؟) . والان $f(x_n) = 2$ ولذلك فكل حد من حدود المتتابعة $< f(x_n) >$ يساوي 2 ولذلك فهي تقترب الى 2 . من الجهة الأخرى ، $f(x_0) = 1$ وعليه فان

$$f(x_n) \not\to f(x_0)$$

ولذلك فالدالة f غير مستمرة في x_o قضية 1·3) أما اذا كان x_0 عددا غير نسبي .