5 . الدوال المقيدة القابلة للتكامل ريمانيا

Boun ded Integrable Fun ctions

صادفنا في البنود السابقة دوال مقيدة غير مستمرة وقابلة للتكامل وصادفنا دوال مقيدة غير مستمرة وغير قابلة للتكامل . والآن لابد أن تتسأل أيها القارىء عن وجود علاقة بين « حجم » مجموعة النقاط التي تكون فيها الدالة غير مستمرة وقابلية هذه الدالة للتكامل . لأجل توضيح هذه العلاقة لابد أن نبين ماهو المقصود « بحجم المجموعة » أو « قياس المجموعة » . أننا في هذا الفصل سوف لانتطرق الى موضوع القياس وذلك اولاً لأنك سوف تدرس موضوع القياس بالتفصيل في فصل قادم ، وثانياً لأننا لانحتاج موضوع القياس بكل تفاصيله في مناقشتنا هنا . وعليه سنكتفي في هذا البند بتحديد معنى المجموعة المهملة أو المجموعة الصفرية أو المجموعة ذات القياس الصفري

تعريف : لتكن S مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية . يقال ان S مجموعة مهملة negligible set (أومجموعة صفرية القياس أومجموعة صفرية) اذا امكن تغطية S بطائفة معدودة من الفترات المفتوحة التي يقل مجموع أطوالها عن أي عدد حقيقي موجب . بالرموز ، اذا كان $\varepsilon > 0$ ، يوجد طائفة معدودة $\{ I_k \}$ من الفترات المفتوحة بحيث ان

$$(1) \quad \bigcup_k I_k \supseteq S$$

و

$$(2) \quad \sum_k | I_k | < \varepsilon$$

ملاحظة : أننا لم نبين في هذا التعريف ماهو المقصود « بالقياس » بل حددنا فقط كيفية تمييز المجموعات الصفرية القياس . ان هذا الأسلوب في تحديد كيفية ايجاد شيء معين على الرغم من عدم معرفة طبيعته بالضبط مألوف لديك . فعندما تذهب الى السوق لتشتري كيلوين من البرتقال ، يعرف البائع كيف يزن كيلوين من البرتقال ، على الرغم من انه قد لايعرف معنى الوزن .

قضية 5.1: كل مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية تكون مهملة . وبصورة اعم كل مجموعة معدودة (منتهية أو غير منتهية) من الأعداد الحقيقية تكون مهملة .

البرهـان : نبرهن أولاً الحالة الخاصة ، ونفرض ان S مجموعة منتهية (يمكن ان تكون خاليـة) .

$$S = \{ x_1, x_2, \dots x_n \}$$

وليكن $\varepsilon > 0$. لكل $1 \leq k \leq n , k$ لتكن I_k الفترة المفتوحة التي طولها $\frac{\varepsilon}{2n}$ ومركزها x_k . من الواضح ان

$$S \subseteq \bigcup_k I_k$$

وان

$$\sum_k | I_k | = \frac{\varepsilon}{2n} . n = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

نفرض الآن ان S غير منتهية ،

$$S = \{ x_1 , x_2 , x_3 , \dots \}$$

ولتكن $\varepsilon > 0$. لكل x_k ، لتكن I_k الفترة المفتوحة التي مركزها x_k وطولهـا $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ من الواضح ان

$$S \subseteq \bigcup_k I_k$$

وان

$$\sum_k | I_k | = \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$$

وهذه الأخيرة متوالية هندسية لانهائية مجموعها $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

قضيـة 5·2 :

(1) كل مجموعة جزئية من مجموعة مهملة هي مجموعة مهملة .

(2) اتحاد اي طائفة معدودة (منتهية أو غير منتهية) من المجموعات المهملـة هـي مجموعة مهملة

البرهـــان : نترك برهان القسم (1) للطالب كتمرين بسيط ونكتفي ببرهان القسم (2) عندما تكون طائفة المجموعات المهملة طائفة غير منتهية . (يترك للطالب أيضاً البرهان عندما تكون هذه الطائفة منتهية) . ليكن $\varepsilon > 0$ ، ولتكن كل من $k, S_k \ni N$ مجموعة مهملة . لكل k ، يوجد طائفة $\{ I_n^{(k)} \mid n \varepsilon N \}$ من الفترات المفتوحة التي تحقق

$$(1) \quad \bigcup_n I_n^{(k)} \supseteq S_k$$

$$(2) \quad \sum_n | I_n^{(k)} \Big\langle \frac{\varepsilon}{2^k}$$

من الواضح ان

$$\bigcup_k \bigcup_n (I_n^{(k)}) \supseteq \bigcup_k S_k$$

و

$$\sum_k \sum_n | I_n^{(k)} | < \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \in$$

مـــلاحظات وامثلـــة : -

(١) لايمكن ان تكون أية فترة في R مجموعة مهملة في الواقع اذا كانت I فترة ما في R وكان $\varepsilon = | I | \frac{1}{2}$ فمن الواضح أنه لايمكن تغطية I بطائفة معدودة من الفترات المفتوحة التي يقل مجموع اطوالها عن ε .

(2) يتبع من (1) ومن القضية السابقة ان اية مجموعة في R تحتوي على فترة كمجموعة جزئية لا يمكن ان تكون مجموعة مهملة

(3) لماكانت مجموعة الاعداد النسبية في R مجموعة معدودة فهي مجموعة مهملة . من الجهة الاخرى ، مجموعة الاعداد غير النسبية مجموعة غيرمهملة لانها لوكانت مهملة لـكان اتحادها مع مجموعة الاعداد النسبية مجموعة مهملة ، ولـكن هذا الاتحاد هو مجموعة الاعداد الحقيقية R وهذه مجموعة غير مهملة .

(4) يوجد مجموعات مهملة وغير معدودة . فمجموعة كانتور المعرفة فيما يلي مثال على هذا النوع من المجموعات .

مجموعة كانتور (نسبة الى الرياضي كانتور ١٨٤٥-١٩١٨) .

لتكن I الفترة المغلقة $[0,1]$ ، ولتكن S_1 المجموعة المتبقية من I بعد رفع الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ اي بعد رفع الثلث الاوسط من I . لتكن S_2 للمجموعة المتبقية من S_1 بعد رفع كل من الفترتين المفتوحتين $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ ، اي بعد رفع المثلث الاوسط من كل من الفترتين $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

وبصورة عامة ، لتكن S_n المجموعة المتبقية من S_{n-1} بعد رفع الثلث الاوسط من كل من الفترات المكونة للمجموعة S_{n-1} لتكن الان

$$S = US_n$$

و

$$C = I \setminus S$$

تسمى المجموعة C مجموعة كانتور. سنترك للطالب ان يبرهن ان المجموعة C مجموعة مهملة (احسب اطوال الفترات المرفوعة) . كما سنترك له ان يبرهن ايضا ان المجموعة C غير قابلة للعد (البرهان ليس سهلا) .

بعد هذه التوطئة عن المجموعات المهملة نستطيع صياغة المبرهنة الرئيسية الآتية التي تسمى مبرهنة ليبيك في التكامل الريماني نسبة الى الرياضي الفرنسي ليبيك Lebesgue (١٨٧٥- ١٩٤١) .

مبرهنة ليبيك في التكامل الريماني 5·3 :

Le besgue Theoem

لتكن الدالة f مقيدة على الفترة المغلقة $[a, b]$ تكون الدالة f قابلة للتكامل الريماني اذا وفقط اذا كانت مجموعة النقاط التي فيها الدالة f غير مستمرة هي مجموعة مهملة .

سنبرهن هذه المبرهنة في عدة خطوات ، وسنبدأ باعطاء المفهوم التالي :

تذبذب الدالة

Saltus of a funclion

لتكن J فترة ما و

$$f: J \to R$$

دالة مقيدة . لكل فترة مفتوحة I في J ، ضع

$$u(f, I) = \sup\{f(x) \mid x \varepsilon I\}$$
$$l(f, I) = \inf\{f(x) \mid x \varepsilon I\}$$

والان ضع

$$\omega(f, I) = u(f, I) - l(f, I)$$

من الواضح ان $\omega(f, I) > o$. واخيرا لكل $x \in J$ ، ضع

$$\omega(f, x) = \inf\{\omega(f, I) \mid x \varepsilon I\}$$

(لاحظ أن inf يؤخذ على جميع الفترات المفتوحة التي تحتوي x) . سنطلق على العدد $\omega(f, x)$ اسم تذبذب الدالة f في النقطة x .

قضية 5.4 تكون الدالة f مستمرة في النقطة x اذا وفقط اذا $\omega(f, x) = 0$

البرهان : افرض ان $\omega(f, x) = 0$ وليكن $\varepsilon > 0$. يوجد فترة مفتوحة I بحيث أن $x \in I$ و

$$\omega(f, I) < \varepsilon$$

(لماذا ؟) . وعليه ، لكل $y \in I$

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

وهذا يبين أن f مستمرة في النقطة x .
نفرض الان ان f مستمرة في x . وليكن $\varepsilon > 0$. يوجد فترة مفتوحة I بحيث أن $x \in I$
ولكل $y \in I$. فان

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(لماذا ؟) . يتبع من هذا ان

$$\omega (f, I) < \varepsilon$$

(كيف ؟) . من هذا نستنتج أن

$$\omega (f, x) = 0$$

(لماذا ؟) . وهذا يكمل البرهان .

قضية 5.5 : لكل $a > 0$ ، اذا كانت

$$D_a = \{ x \varepsilon J \mid \omega (f, x) \geq a \}$$

فان المجموعة D_a مجموعة مغلقة .

البرهان : اذا كان $a > w (f,I)$ ، يوجد فترة مفتوحة I بحيث أن $x \in I$ و $a > \omega (f, I)$ (لماذا ؟) . وهذا يؤول الى ان لكل $y \in I$ ، فان $a > \omega (f, y)$. نستنتج من هذا أن مكملة المجموعة D_a هي مجموعة مفتوحة وعليه فان D_a مجموعة مغلقة .

كنتيجة مباشرة للقضيتين السابقتين لدينا :

نتيجة 5.6 لتكن

$$F : J \rightarrow R$$

دالة مقيدة ، ولتكن D مجموعة نقاط عدم الاستمرارية للدالة f . فان

$$D = \bigcup_{n \varepsilon N} D_{\frac{1}{n}}$$

وعليه فان D هي اتحاد طائفة معدودة من المجموعات المغلقة وبعد هذه التوطئة نستطيع البرهنة على مبرهنة ليبيك التي نعيد صياغتها مرة أخرى .

مبرهنة ليبيك

لتكن J الفترة المغلقة $[a, b]$ ولتكن

$$F : J \rightarrow R$$

دالة مقيدة . تكون الدالة f قابلة للتكامل الريماني اذا وفقط اذا كانت المجموعة D لنقاط عدم الاستمرارية للدالة f مجموعة مهملة .

البرهان : نفرض ان المجموعة D مجموعة مهملة وليكن $\varepsilon > 0$

لتكـــن