3. تعريف التكامل الليبيكي : The definition of lebesgue integral

لتكن S مجموعة مقيدة قابلة للقياس . ولتكن

$$f : S \longrightarrow R$$

دالة مقيدة . اذا كانت $P = \{ S_i \}_{i \varepsilon A}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة S ، نضع

وتضع

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \{ f(x) \mid x \varepsilon S_i \} \quad \ldots \qquad i \varepsilon \Lambda \\ M_i &= \sup \{ f(x) \mid x \varepsilon S_i \} \\ m &= \inf \{ f(x) \mid x \varepsilon S \} \\ M &= \sup \{ f(x) \mid x \varepsilon S \} \end{aligned}$$

والان نعرف

$$\underline{L} (f,p) = \sum_{i \varepsilon A} m_i \, \mu (S_i)$$

$$\bar{L} (f,p) = \sum_{i \varepsilon V} M_i (\mu (S_i)$$

سنطلق على العددين $\underline{L} (f,p)$ و $\bar{L} (f,p)$ اسم المجموع الليبيكي الاسفل للدالة f بالنسبة للتجزئة .p والمجموع الليبيكي الاعلى للدالة f بالنسبة للتجزئة p على التوالي .

لاحظ أن

$$m \, \mu (S) \leq \underline{L} (f,p) \leq \bar{L} (f,p) \leq M \, \mu (S)$$

سنترك برهان القضية التالية للقارىء (قارن مع القضية المناظرة في تكامل ريمان)

قضية 3.1 : اذا كانت التجزئة p' هي تجزئة منعمة من التجزئة p فان

$$\underline{L} (f,p') \geq \underline{L} (f,p)$$
$$\bar{L} (f,p') \leq \bar{L} (f,p)$$

نتيجة 3.2 : لكل تجزئتين p_1 و p_2 للمجموعة S

$$\underline{L} (f,p_1) \leq \bar{L} (f,p_2)$$

البرهان : لتكن

$$p = p_1 \cap p_2$$

التجزئة p هي تجزئة منعمة لكل من p_1 و p_2 وعليه

$$\underline{L}(f,p_1) \leq \underline{L}(f,p) \leq \bar{L}(f,p_1) \leq \bar{L}(f,p_2)$$

بمقارنة هذه النتيجة مع النتيجة المناظرة لها في نظرية ريمان للتكامل ، يتبين لنا انه بالامكان اتباع الخطوات نفسها التي اتبعناها في بناء نظرية ريمان للتكامل لبناء نظرية أخرى للتكامل. وهكذا نضع

$$\{\underline{L}(f,p) \mid p \text{ تجزئة ليبيكية للمجموعة } S\} = \underline{L} = \underline{L}(f)$$

$$\{\bar{L}(f,p) \mid p \text{ تجزئة ليبيكية للمجموعة } S\} = \bar{L} = \bar{L}(f)$$

نستنتج مما سبق ان كلا من المجموعتين العدديتين $\underline{L}$ و $\bar{L}$ مقيدة ، في الواقع $\underline{L}$ مقيدة من الاسفل بالعدد $m\,\mu\,(S)$ ومقيدة من الاعلى بكل عنصر في $\bar{L}$. في حين $\bar{L}$ مقيدة من الأعلى بالعدد $M\,\mu\,(S)$ ومقيدة من الاسفل بكل عنصر في $\underline{L}$.

ضع الان

$$\underline{L\int} f = \sup(\underline{L})$$

$$\overline{L\int} f = \inf(\bar{L})$$

ونسمي العدد $\underline{L\int} f$ التكامل الليبيكي الاسفل للدالة f ونسمي العدد $\overline{L\int} f$ التكامل الليبيكي الاعلى للدالة f .

نستنتج مباشرة من الفقرة السابقة ومن (التمرين 7 ف ١) أن

$$\underline{L\int} f \leq \overline{L\int} f$$

واذا كان

$$\underline{L\int} f = \overline{L\int} f = \left(L\int f\right)$$

فيقال ان الدالة f قابلة للتكامل ليبيكيا (أو قابلة للتكامل حسب مفهوم ليبيك) ونسمي العدد $L\int f$ باسم التكامل الليبيكي للدالة f . (كما سنكتب احيانا $L\int_s f$ للتأكيد على المنطلق S) .

لتكن الان $J = [a,b]$ فترة مغلقة (بالطبع تكون قابلة للقياس) .

لاحظنا في البند الاول ان كل تجزئة ريمانية للفترة J تعرف تجزئة ليبيكية وعليه من الواضح أن

$$\underline{R}(f) \subseteq \underline{L}(f)$$
$$\bar{R}(f) \subseteq \bar{L}(f)$$

(راجع الفصل 7 البند ١ لتذكر الرموز $\underline{R}(f)$ و $\bar{R}(f)$) .

وهكذا فان

$$\sup(\underline{R}) \leq \sup(\underline{L})$$

و

$$\inf(\bar{R}) \geq \inf(\bar{L})$$

وهذا يعني أن

$$R\underline{\int} f \leq L\underline{\int} f$$

و

$$R\bar{\int} f \geq L\bar{\int} f$$

وبما أن

$$L\underline{\int} f \leq L\bar{\int} f$$

نحصل على العلاقة التالية

$$R\underline{\int} f \leq L\underline{\int} f \leq L\bar{\int} f \leq R\bar{\int} f$$

نستنتج من هذا انه اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة J . فان

$$R\underline{\int} f = R\bar{\int} f$$

وبالتالي يكون

$$L\underline{\int} f = L\bar{\int} f$$

وأن

$$R\underline{\int} f = L\underline{\int} f = L\bar{\int} f = R\bar{\int} f$$

أي ان الدالة f قابلة للتكامل ليبيكيا . وهكذا نكون قد برهنا المبرهنة المهمة التالية .

مبرهنة 3.3 :

اذا كانت J فترة مقيدة مغلقة وكانت

$$f : J \longrightarrow R$$

دالة مقيدة قابلة للتكامل الريماني ، فان f قابلة للتكامل الليبيكي وأن

$$R\int f = L\int f$$

المبرهنة السابقة تبين ان التكامل الليبيكي هو امتداد للتكامل الريماني للدوال المقيدة المعرفة على فترات مغلقة وان مجموعة الدوال المقيدة المعرفة على فترة مغلقة والقابلة للتكامل ريمانياً هي مجموعة جزئية من مجموعة الدوال المقيدة المعرفة على نفس الفترة والتي تكون قابلة للتكامل ليبيكياً .

بالرموز ، لتكن J تمثل الفترة المغلقة $[a,b]$ ، ولتكن $RI[J]$ تمثل مجموعة الدوال المقيدة على J والقابلة للتكامل ريمانياً . ولتكن $LI[J]$ تمثل مجموعة الدوال المقيدة على J والقابلة للتكامل ليبيكياً . يمكن صياغة المبرهنة السابقة على النحو الآتي :ــ

$$RI[J] \subseteq LI[J]$$

وان

$$R\int = L\int \Big| R[J]$$

المثال التالي يبين ان $LI[J] \neq RI[J]$. اي ان مجموعة الدوال القابلة للتكامل ليبيكياً على فترة ما اوسع من مجموعة الدوال القابلة للتكامل ريمانياً .

مثال : لتكن $f : [a,b] \longrightarrow R$

معرفة على النحو

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{x عدد نسبي} \\ 2 & \text{x عدد غير نسبي .} \end{cases}$$

بينا سابقاً عند دراستنا للتكامل الريماني ان الدالة f غير قابلة للتكامل ريمانياً . سنبين الآن ان هذه الدالة قابلة للتكامل ليبيكياً . اذا كان S يمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة $[a,b]$ ، S_2 يمثل مجموعة الأعداد النسبية في نفس الفترة . فالطائفة $p = \{S_1, S_2\}$ هي تجزئة ليبيكية للفترة $[a,b]$. وذلك لأن كلا من S_1 و S_2 مجموعة قابلة للقياس (لماذا ؟) و

$$S_1 \cap S_2 = \phi$$

$$S_1 \cup S_2 = [a,b]$$

كما ان

$$\mu(S_1) = 0$$

$$\mu(S_2) = b - a$$

وعليه

$$\underline{L}(f,p) = (-3)\mu(S_1) + 2\mu(S_2)$$
$$= 2(b-a)$$
$$\overline{L}(f,p) = (-3)\mu(S_1) + 2\mu(S_2)$$
$$= 2(b-a)$$

يتبع من هذا ، ومن تعريف التكامل الأعلى والتكامل الأسفل ان

$$L\underline{\int} f \geq 2(b-a)$$

$$L\overline{\int} f \leq 2(b-a)$$

ولكن

$$L\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$$

دائماً . وهكذا فأن،

$$L\underline{\int} f = L\int f = L\int f = 2(b-a)$$

أي أن الدالة f قابلة للتكامل ليبيكياً وتكاملها يساوي $2(b-a)$.

ملاحظة : ابتدأمن البند القادم سنكتب $\int f$ و $\overline{\int} f$ و $\underline{\int} f$ بدلاً عن $L\int f$ و $L\overline{\int} f$ و $L\underline{\int} f$ على التوالي وذلك اختصاراً للرموز وعند عدم وجود التباس مع التكامل الريماني . كما سنكتب احياناً $\int_S f$ للتأكيد على منطلق الدالة f .

القضية التالية تعطي شروطاً ضرورية وكافية لتكون الدالة قابلة للتكامل ليبيكياً . سنستخدم القضية فيما بعد .

قضية 3.4 : لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس . ولتكن $f : S \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة . تكون الدالة f قابلة للتكامل ليبيكياً اذا وفقط اذا لكل $\in > 0$ ، يوجد تجزئة ليبيكية P للمجموعة S بحيث ان

$$\overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < \in$$

البرهان : سنترك البرهان البسيط كتمرين للطالب (قارن مع القضية المناظرة في الفصل السابع) .

4 بعض خواص تكامل ليبيك :

Some properties of lebesgue integral

ندرس في هذا البند بعض الخواص الاساسية لتكامل ليبيك ، ونبدأ بالقضية الاتية
قضية 4.1 : اذا كانت S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس ، فكل دالة ثابتة على S تكون قابلة للتكامل . في الواقع ، اذا كانت

$$f(x) = a \qquad \forall x \varepsilon S$$

فان

$$\int f = a\,\mu(S)$$

البرهان : اذا كانت p تجزئة ما للمجموعة S ، فان

$$\underline{L}(f,p) = a\,\mu(S)$$
$$\overline{L}(f,p) = a\,\mu(S)$$

يتبع من هذا أن

$$\underline{\int} f = \overline{\int} f = a\,\mu(S)$$

قضية 4.2 : لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس ولتكن

$$f : S \longrightarrow R$$

دالة مقيدة وقابلة للتكامل (الليبيكي) . اذا كان

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \varepsilon S$$

فان

$$m\,\mu(S) \leq \int f \leq M\,\mu(S)$$

وبصورة خاصة ، اذا كان

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall x \varepsilon S$$

فان

$$\int f \geq 0$$

البرهان : اذا كانت $P = \{S_i\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة S . فان