4. بعض خواص تكامل ليبيك :

Some properties of lebesgue integral

ندرس في هذا البند بعض الخواص الاساسية لتكامل ليبيك ، ونبدأ بالقضية الاتية

قضية 4.1 : اذا كانت S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس ، فكل دالة ثابتة على S تكون قابلة للتكامل . في الواقع ، اذا كانت

$$f(x) = a \qquad \forall x \varepsilon S$$

فان

$$\int f = a\,\mu(S)$$

البرهان : اذا كانت p تجزئة ما للمجموعة S ، فان

$$\underline{L}(f,p) = a\,\mu(S)$$
$$\bar{L}(f,p) = a\,\mu(S)$$

يتبع من هذا أن

$$\underline{\int} f = \bar{\int} f = a\,\mu(S)$$

قضية 4.2 : لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس ولتكن

$$f : S \longrightarrow R$$

دالة مقيدة وقابلة للتكامل (الليبيكي) . اذا كان

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \varepsilon S$$

فان

$$m\,\mu(S) \le \int f \le M\,\mu(S)$$

وبصورة خاصة ، اذا كان

$$f(x) \ge 0 \qquad \forall x \varepsilon S$$

فان

$$\int f \ge 0$$

البرهان : اذا كانت $P = \{S_i\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة S . فان

$$\underline{L}(f,p) = \sum_i m_i \mu(S_i)$$
$$\geq \sum_i m \mu(S_i)$$
$$= m \sum_i \mu(S_i) = m \mu(S)$$

نستنتج من هذا ومن تعريف $\underline{\int} f$ أن

$$\underline{\int} f \geq m \mu(S)$$

وبما ان f قابلة للتكامل فان

$$\int f = \underline{\int} f \geq m \mu(S)$$

وبالطريقة نفسها نبرهن أن

$$\int f \geq M \mu(S).$$

قضية 4.3 : اذا كانت S مجموعة مهملة وكانت

$$f : S \to R$$

دالة مقيدة . فان f قابلة للتكامل وان

$$\int_S f = 0$$

البرهان : لتكن $P = \{S_i\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة S . بما أن S مجموعة مهملة . فان كلا من S_i مجموعة مهملة أيضا و$\mu(S_i) = 0$ ولهذا فان

$$\underline{L}(f,p) = \sum_i m_i \mu(S_i) = 0$$
$$\overline{L}(f,p) = \sum_i M_i \mu(S_i) = 0$$

يتبع من هذا ومن تعراف $\underline{\int} f$ ، $\overline{\int} f$ أن

$$\underline{\int} f = 0 , \overline{\int} f = 0$$

وهكذا فان f قابلة للتكامل وأن

$$\int_S f = 0$$

قضية 4 .4: لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس ولتكن A ، B مجموعتين جزئيتين منفصلتين من S بحيث أن كلا منهما قابلة للقياس $S = A \cup B$ اذا كانت

$$f : S \longrightarrow R$$

دالة مقيدة وقابلة للتكامل على S فان قابلة للتكامل على كل من A و B وأن

$$\int_S f = \int_A f + \int_B f$$

(ماهي القضية المناظرة لهذة في نظرية ريمان للتكامل ؟) .

البرهان : ليكن $\varepsilon > 0$ يوجد تجزئة ليبيكية $p = \{ S_i \}$ للمجموعة S بحيث أن

و

$$\int_S f - \varepsilon < \underline{L} (f , p)$$

$$\bar{L} (f,p) < \int_S f + \varepsilon$$

(لماذا ؟) . لكل i ، ضع

$$A_i = S_i \cap A$$
$$B_i = S_i \cap B$$

سنترك للطالب أن يبين أن $p_1 = \{ A_i \}$ هي تجزئة ليبيكية للمجموعة A وأن $p_2 = \{ B_i \}$ هي تجزئة ليبيكية للمجموعة B . ضع

$$f_1 = f | A , f_2 = f | B$$

من الواضح أن

$$\underline{L} (f,p) = \underline{L} (f_1 , p_1) + \underline{L} (f_2 , p_2)$$
$$\bar{L} (f,p) = \bar{L} (f_2 , p_2) + \bar{L} (f_2 , p_2)$$

نستنتج من هذه العلاقات ومن العلاقات التي سبقتها ان

$$\int_S f - \varepsilon < \underline{L} (f_1 , p_1) + \underline{L} (f_2 , p_2)$$
$$\leq \underline{\int}_A f + \underline{\int}_B f$$

و

$$\overline{\int}_A f + \overline{\int}_B f \leq \bar{L} (f_1 , p_1) + \bar{L} (f_2 , p_2)$$
$$< \int_S f + \varepsilon$$

ولهذا فان

$$\int_S f - \varepsilon \le \underline{\int}_A f + \underline{\int}_B f$$

$$\le \overline{\int}_A f + \overline{\int}_B f \le \int_S f + \varepsilon$$

وبما أن هذه العلاقة تتحقق بجميع $\varepsilon > 0$ ، نستنتج أن

$$\int_S f \le \underline{\int}_A f + \underline{\int}_B f \le \overline{\int}_A f + \overline{\int}_B f \le \int_S f$$

(كيف تبرر هذا الاستنتاج ؟) . وعليه

$$\underline{\int}_A f + \underline{\int}_B f = \overline{\int}_A f + \overline{\int}_B f = \int_S f$$

ولكن

$$\underline{\int}_A f \le \overline{\int}_A f$$

$$\underline{\int}_B f \le \overline{\int}_B f$$

ولذا يتبع من هذه ومن العلاقة السابقة لها أن

$$\underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f$$

$$\underline{\int}_B f = \overline{\int}_B f$$

وهكذا فان f قابلة للتكامل على كل من A و B وأن

$$\int_S f = \int_A f + \int_B f$$

كنتيجة مباشرة لهذه القضية لدينا :

نتيجة 4.5 : اذا كانت f قابلة للتكامل على المجموعة S وكانت S_1 مجموعة جزئية

قابلة للقياس من S ، فان f قابلة للتكامل على S_1 .

البرهان : سنترك البرهان البسيط كتمرين للطالب .

باستخدام الاستقراء الرياضي يمكن ان نحصل على النتيجة الآتيــة :

نتيجة 4.6 : لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس . ولتكن

$$A_1 , A_2 , \ldots A_n$$

مجموعات جزيئة من S بحيث ان كل منها قابلة للقياس ،

$$S = \bigcup_i A_i$$

و

$$A_i \cap A_j = \phi \qquad i \neq j$$

اذا كانت

$$f : S \to R$$

دالة مقيدة وقابلة للتكامل على S . فان f قابلة للتكامل على كل من A_i وان

$$\int_S f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

المبرهنة التالية تبين ان عدد المجموعات A_i في النتيجة السابقة يمكن ان يكون غير منتهياً . وبعبارة دقيقــة لدينا

مبرهنـــة 4.7 :

لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس . ولتكن $\{ A_i \}$ طائفة معددة من المجموعات الجزئية من S بحيث ان كلا منها قابلة للقياس .

و

$$S = \bigcup_i A_i$$

$$A_i \cap A_j = \phi \qquad i \neq j$$

اذا كانت

$$f : S \to R$$

دالة مقيدة قابلة للتكامل على S . فان f قابلة للتكامــل على كل من A_i وان

$$\int_S f = \sum_i \int_{A_i} f$$

البرهان : اذا كانت الطائفة $\{ A_i \}$ طائفة منتهية . فنحصل على النتيجة السابقة . ولهذا

سنفرض ان الطائفة $\{A_i\}$ غير منتهيـــة .
لــكل $n \in N$ ضع

و

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$E_n = S - B_n$$

لاحظ ان كلا من B_n و E_n قابلة للقياس (لماذا ؟) وان

$$B_n \subseteq B_{n+1} \qquad \forall_n \in N$$

$$E_n \subseteq E_{n+1} \qquad \forall_n \in N$$

حسب القضية السابقة ونتيجتها ، تكون الدالة f قابلة للتكامل على كل من B_n , E_n وان

$$\int_S f = \int_{B_n} f + \int_{E_n} f$$

وان

$$\int_{B_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

علينا ان نبرهن الآن ان المتتابعة العددية $<\int_{B_n} f>$ تقترب الى . اي علينا ان نبرهن ان المتتابعة العددية $<\int_{E_n} f>$ تقترب الى الصفر .
بما ان f مقيدة ، يوجد $0 \leq M$ بحيث ان

$$-M \leq f(x) \leq M \qquad \forall_x \in S$$

ولهذا ، وبموجب القضية 4.2 ، فان

$$-M\,\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f \leq M\,\mu(E_n)$$

اي ان

$$\left| \int_{E_n} f \right| \leq M \mu (E_n)$$

من الجهة الاخـــرى ،

$$\mu (S) = \sum_i \mu (A_i)$$
$$= \mu (B_n) + \mu (E_n)$$

وهذا يعني ان المتابعة العددية $< \mu (B_n) >$ تقترب الى $\mu(S)$ ، اي ان المتابعة العددية $< \mu(E_n) >$ تقترب الى الصفر (نتيجة5·8 ف9)

بعبارة أخرى ، لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k \ni N$ بحيث أن

$$\mu (E_n) < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \forall_n > k$$

يتبع من هذا ومن علاقة سابقة أن

$$\left| \int_{En} f \right| < \varepsilon \qquad \forall_n > k$$

وهذا يبين ان

$$\int_{En} f \to 0$$

وبالتالي فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_i \int_{Ai} f$ متقاربة وأن

$$\sum_i \int_{Ai} f = \int_S f$$

وهذا يـكمل برهان المبرهنة .

القضية التالية هي عكس القضية السابقة 4·6

قضية 4·8 اذا كانت الدالة المقيدة f قابلة للتكامل على كل من المجموعتين القابلتين للقياس B,A . وكانت

$$A \bigcap B = \phi$$