4. القياس الخارجي للمجموعة المقيدة

Outer measure of a bounded set

بعد هذه القضية لا بد أن يخطر ببال الطالب التساؤل الآتي : هل يمكن توسيع مجال تعريف التطبيق Δ الى كل المجموعات الجزئية المقيدة في R بحيث يبقى التطبيق يحقق الخواص الخمسة السابقة ؟ . يمكن البرهنة على أن الجواب لهذا التساؤل هو بالنفي . (سوف لا نعطي البرهان هنا) .

وبناء على هذا ، نتساءل هل يمكن توسيع مجال التطبيق Δ الى صنف من المجموعات يحتوي صنف المجموعات المفتوحة المقيدة ؟ لقد نجح الرياضي الفرنسي ليبيك عام ١٩٠٢ من ايجاد صنف من المجموعات المقيدة يحتوي صنف المجموعات المفتوحة المقيدة بصورة فعلية ، وثم توسيع مجال تعريف التطبيق Δ الى هذا الصنف الجديد من المجموعات بحيث يبقى التطبيق محافظا على الخواص التي عددناها سابقا . سنطلق على هذا الصنف الجديد من المجموعات اسم صنف المجموعات المقيدة القابلة للقياس لليبيكيـــــا (lebesgue bounded measurable sets) وبالاختصار . المجموعات المقيدة القابلة للقياس . سنبدأ فيما يلي بتعريف ودراسة هذا الصنف من المجموعات .

تعريف : لتكن <u>S</u> مجموعة مقيدة في R ، ولتكن $\theta(S)$ طائفة كل المجموعات المقيدة المفتوحة G والتي تحتوي على S . من الواضح أن $\theta(S)$ مجموعة غيـر خالية حيث يوجد فترة مفتوحة (a,b) تحتوي على S . ضع

$$\mu^*(S) = \inf\{\Delta(G) \mid G \,\varepsilon\, \theta(S)\}$$

من الواضح ان القيد الاسفل الاكبر $\mu^*(S)$ موجود لان المجموعة التي على الجهة اليمنى في العلاقة السابقة مقيدة من الاسفل بالصفر . كما ان هذه المجموعة غير خالية . سنطلق على العدد $\mu^*(S)$ اسم القياس الخارجي للمجموعة . (outer measure of set) .

لاحظ ان التطبيق الحقيقي μ^* معرف لكل مجموعة مقيدة S وأنه تطبيق غير سالب .

قبل أن ندرس خواص هذا التطبيق ، دعنا نتفحص بعض الأمثلـة أمثلـة وملاحظـات :

(1) اذا كانت G مجموعة مفتوحة مقيدة فانه من الواضح أن

$$\mu^*(G) = \Delta(G)$$

وبصورة خاصة فان

$$\mu^*(\phi) = \Delta(\phi) = 0$$

ان هذه الملاحظة هي نتيجة مباشرة للتعريف .

(2) اذا كانت S مجموعة تتكون من نقطة واحدة x ، أي $S = \{ x \}$ ، فان

$$\mu^* (S) = 0$$

في الواقع لكل $n \in N$ ، فان الفترة المفتوحة $B_n = \left(x - \frac{1}{n} , x + \frac{1}{n} \right)$ تحتوي على x وان طولها

$$\Delta (B_n) = \left(x + \frac{1}{n} \right) - \left(x - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{n}$$

من هذا ومن تعريف μ^* نحصل على

$$0 \leq \mu^* (S) \leq \frac{2}{n}$$

ولكل $n \in N$ نستنتج أن

$$\mu^* (S) = 0$$

(3) وبصورة اعم لدينا : اذا كانت S مجموعة معدودة (منتهية أو غير منتهية) فان

$$\mu^* (S) = 0$$

البرهان : لتكن

$$S = \{ x_1 , x_2 , \dots x_n , \dots \}$$

ولتكن $\varepsilon > 0$. لكل $i \in N$. خذ

$$B_i = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} , x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right)$$

من الواضح ان B_i فترة مفتوحة تحتوي على x_i وان

$$\Delta (B_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$$

وعليه فأن

$$S \subseteq \bigcup_i B_i$$

وحيث ان $\cup_i B_i$ مجموعة مفتوحة ولهذا

$$\Delta (\bigcup B_i) \leq \Sigma \Delta (B_i)$$

$$= \sum_i \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

نستنتج من هذا ومن تعريف القياس الخارجي أنه لكل $\varepsilon > 0$

$$\mu^* (S) < \varepsilon .$$

وبما ان

$$\mu^* (s) \geq 0$$

فأن

$$\mu^* (S) = 0$$

(4) سنترك للطالب ان يبرهن على انه اذا كانت S مجموعة مهملة (سواء اكانت معدودة امغير معدودة) فأن $\mu^* (S) = 0$
(راجع تعريف المجموعة المهملة في الفصل السابع) .

(5) وبالعكس اذا كانت S مجموعة مقيدة وكان قياسها الخارجي يساوي صفراً فأن S مجموعة مهملة . في الواقع اذا كان

$$\mu^* (S) = 0$$

فلكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد مجموعة مفتوحة G تحتوي على S و

$$\Delta (G) < \varepsilon$$

وحسب القضية المساعدة 3 · 1 يمكن تجزئة G الى عدد معدود من الفترات المفتوحة $\{ I_n \}$ المنفصلة عن بعضها . اي ان

$$G = \cup_n I_n$$

وانه لكل m و $n \in N$. اذا كان $m \neq n$ فأن

$$I_m \cap I_n = \phi$$

ولذلك فأن

$$\Sigma \Delta I_n = \Delta (G) < \varepsilon$$

نستنتج من هذا ومن تعريف المجموعة المهملة ان S مجموعة مهملة .

(6) اذا كانت E هي الفترة المغلقة [a,b] فأن

$$\mu^*(E) = b - a$$

البرهـــان : لكل $n \in N$ ، خذ

$$B_n = \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right)$$

B_n مجموعة مفتوحة مقيدة تحتوي على E و

$$\Delta(B_n) = b - a + \frac{2}{n}$$

وعليه فأن .

$$(1) \qquad \mu^*(E) \leq b - a + \frac{2}{n} \qquad \forall_n \varepsilon N$$

من الجهة الأخرى . فأن كل مجموعة مفتوحة G تحتوي على E . تحتوي أيضـــاً الفترة المفتوحة (a,b) ولذلك فأن

$$\Delta(G) \geq \Delta(a,b) = b - a$$

وبالتالي فأن

$$\mu^*(E) \geq b - a$$

نستنتج من العلاقتين (1) و (2) ان $\mu^*(E) = b - a$.

(7) وبالطريقة السابقة نفسها نبرهن أنه اذا كانت E تساوي (a,b) او [a,b] فأن

$$\mu^*(E) = b - a$$

بعد هذه الأمثلة والملاحظات نعطي المبرهنة التالية التي تبين خواص القياس الخارجي μ^* .

مبـــرهنـــــة 4.1 :

(1) لكل مجموعة مقيدة S في R . فأن

$$\mu^*(S) \geq 0$$

و

$$\mu^*(\phi) = 0$$

(2) اذا كانت كل من S_1 و S_2 مجموعة مقيدة ، وكانت $S_1 \subseteq S_2$ فأن

$$\mu^*(S_1) \leq \mu^*(S_2)$$

اي ان التطبيق μ^* تطبيق رتيب (غير متناقص) .

(3) اذا كانت كل من S_1 و S_2 مجموعة مقيدة فأن

$$\mu^*(S_1 \cup S_2) \leq \mu^*(S_7) + \mu^*(S_2)$$

(4) اذا كانت $\{S_n\}$ طائفة معدودة (منتهية أوغيرمنتهية) من المجموعات المقيدة واذا كانت المجموعة $\bigcup_n S_n$ مجموعة مقيدة فان

$$\mu^*\left(\bigcup_n S_n\right) \leq \sum_n \mu^*(S_n)$$

(5) اذا كانت S مجموعة مقيدة وكان t عددا حقيقيا فان

$$\mu^*(S + t) = \mu^*(S)$$

حيث

$$S + t = \{x + t \mid x \in S\}$$

وهذه الخاصية تبين ان القياس الخارجي للمجموعة لايتغير عند ازاحة المجموعة أو أن المجموعات « المتطابقة » تملك نفس القياس الخارجي .

البرهان : الخواص (1) و (2) تتبع مباشرة من التعريف ، الخاصية (5) تتبع من التعريف ومن الملاحظة سهلة البرهان التي تنص على انه بازاحة مجموعة مفتوحة نحصل على مجموعة مفتوحة لها نفس الطول ، وعليه سنترك برهانها للطالب . الخاصية (3) . . حالة خاصة من (4) ولذلك سنبرهن (4) . لكل فلكل $\varepsilon > 0$ ، ولكل n توجد مجموعة مفتوحة G_n بحيث أن

$$S_n \subseteq G_n$$

وأن

$$\Delta(G_n) < \mu^*(S_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

تعريف μ^*) . اذا كانت

$$G = \bigcup_n G_n$$

فان G مجموعة مفتوحة وأن

$$\Delta(G) \leq \sum_n \Delta(G_n)$$

و

$$\bigcup_n S_n \leq \bigcup_n G_n = G$$

وعليه فان

$$\leq \sum_n \Delta (G_n) \quad S^2$$

$$< \sum_n [\mu^* (S_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}]$$

$$= (\sum_n \mu^* (S_n)) + \varepsilon$$

ولما كانت هـذه العلاقة صحيحة لكل ε . نستنتج أن

$$\mu^* (\bigcup_n S_n) \leq \sum_n \mu^* (S_n)$$

وهذا يكمل برهان المبرهنة .

ملاحظة : اذا كانت كل من S_1 . و S_2 . مجموعة مقيدة وكانت

$$S_1 \cap S_2 = \phi$$

فليس من الضروري أن يكون

$$\mu^* (S_1 \cup S_2) = \mu^* (S_1) + \mu^* (S_2)$$

حيث توجد مجموعات مقيدة ومنفصلة عن بعضها لاتحقق هذه العلاقة . من الجهة الاخرى . لاحظنا في القضية 3.2 أنه اذا كانت كل من S_1 و S_2 مجموعة مفتوحة مقيدة وكانت

$$G_1 \cap G_2 = \phi$$

فان

$$\Delta (G_1 \cup G_2) = \Delta (G_1) + \Delta (G_2)$$

لذا لوقارنا المبرهنة 4.1 مع القضية 3.2 نجد ان التطبيقين μ^* و Δ يختلفان في حيث السلوك في تحقيقهما للخاصية الاخيرة فقط . ان وجود المجموعات S_1 , S_2 التي لاتسلك بصورة جيدة . اي

$$\mu^* (S_1 \cup S_2) \neq \mu^* (S_1) + \mu^* (S_2)$$

على الرغم من

$$S_1 \cap S_2 = \phi$$