كل من المجموعتين $[a, \infty -)$ و $[b, \infty -)$ مجموعة مغلقة . وعليه حسب الفرضية ، كل من المجموعتين $f^{-1}(-\infty, a]$, $f^{-1}(-\infty, b]$ مجموعة قابلة للقياس . يتبع من هذا أن $f^{-1}(a,b]$ مجموعة قابلة للقياس . (راجع خواص المجموعات القابلة للقياس) . سنترك برهان الحالة الاخرى للطالب .

(ج) $\Leftarrow$ (د) . نلاحظ أن

$$(a,b) = R - (-\infty, a) - [b, \infty)$$

كما ان

$$(-\infty, a] = \bigcup_{h=0}^{\infty} (a-n-1, a-n]$$

وعليه فان

$$[b, \infty) = \bigcup_{h=0}^{\infty} [b+n, b+n+1)$$

$$(a,b) = R - \{\bigcup_{h=0}^{\infty} (a-n-1, a-n)\} - \{\bigcup_{h=0}^{\infty} [b+n, b+n+1)\}$$

وبالتالي فان

$$f^{-1}(a,b) = S - \{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(a-n-1, a-n]\} - \{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}[b+n, b+n+1)\}$$

وتتبع النتيجة الان كما في البرهان السابق .

(د) — (أ) . اذا كانت G مجموعة مفتوحة في R . فان

$$G = \bigcup_{h} I_n$$

حيث I_n فترة مفتوحة في R (القضية المساعدة ف q) . والان

$$f^{-1}(G) = U_n f^{-1}(I_n)$$

حسب الفرضية . كل من المجموعات $f^{-1}(I_n)$ مجموعة قابلة للقياس . ولهـــذا فاتحادها مجموعة قابلة للقياس

نتيجة 1·3 : لتكن

$$f : S \to R$$

(أ) تكون الدالة f قابلة للقياس اذا وفقط اذا لـكل $a \ni R$ $f^{-1}(a, \infty)$ مجموعة قابلة للقياس .

(ب) تكون f قابلة للقياس اذا وفقط اذا لـكل $a \ni R$

مجموعة قابلة للقياس . $f^{-1}[a,\infty)$

(جـ) تكون f قابلة للقياس اذا وفقط اذا لـكل $R \ni a$.

مجموعة قابلة للقياس . $f^{-1}(-\infty,a)$

(د) تكون f قابلة للقياس اذا وفقط اذا لـكل $R \ni a$

مجموعة قابلة للقياس . $f^{-1}(-\infty,a]$

البرهان : سنترك البرهان المباشر للطالب كتمرين بسيط .

امثلة وملاحظات :

(1) لتكن $f:[a,b] \to R$

دالة معرفة على النحو

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{عدد نسبي } x \\ 3 & \text{عدد غير نسبي } x \end{cases}$$

الدالة f قابلة للقياس . (تذكر انها غير مستمرة في جميع النقاط) . في الواقع ، اذا كانت G مجموعة مفتوحة في R ، فان

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} [a,b] & \text{اذا كان } G \ni 3,2 \\ \text{مجموعة الاعداد النسبية في } [a,b] & \text{اذا كان } G \not\ni 3,\ G \ni 2 \\ \text{مجموعة الاعداد غير النسبية في } [a,b] & \text{اذا كان } G \not\ni 2,\ G \ni 3 \\ \phi & \text{اذا كان } G \not\ni 3,2 \end{cases}$$

وكل من هذه المجموعات الاربعة هي مجموعة قابلة للقياس . وعليه فان f دالة قابلة للقياس .

(2) اذا كانت $f:[a,b] \to R$

دالة رتيبة ، فان f قابلة للقياس

في الواقع ، لـكل فترة مغلقة $[c,d]$ الصورة العكسية $f^{-1}[c,d]$ تكون فترة ايضا (لماذا ؟) . ولهذا فان الدالة f قابلة للقياس .

(3) لتكن S مجموعة جزئية من R ، ولتكن $C_s : R \to R$

دالة معرفة على النحو

$$C_s(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

اذا كانت المجموعة S قابلة للقياس . فان الدالة C_s تكون قابلة للقياس ايضا (لماذا ؟) وبالعكس . اذا كانت C_s دالة قابلة للقياس . فان المجموعة S قابلة للقياس . في

الواقع

$$S = f^{-1}\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

بما انه يوجد مجموعات غير قابلة للقياس (راجع نهاية الفصل السابق) . نستنتج من هذا المثال انه يوجد ايضا دوال غير قابلة للقياس .

قضية 1·4 : اذا كانت $f : S \to R$ دالة قابلة للقياس ، وكانت $g : R \to R$ دالة مستمرة ، فان gof دالة قابلة للقياس

البرهان : اذا كانت G مجموعة جزئية من R ، فان

$$(gof)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$$

ولهذا ، اذا كانت G مجموعة مفتوحة ، فان $g^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة (لان g دالة مستمرة) وعليه فان $f^{-1}(g^{-1}(G))$ مجموعة قابلة للقياس (لان f قابلة للقياس) . وهكذا فان gof دالة قابلة للقياس .

ملاحظة : اذا كانت كل من g,f دالة قابلة للقياس ، فليس من الضروري ان تكون gof دالة قابلة للقياس ، سنترك للطالب ان يفتش عن مثال .

2. فضاء الدوال القابلة للقياس

The space of measurable functions

في هذا البند نبين ان مجموعة الدوال القابلة للقياس على مجموعة ما S تكون فضاءً خطيا . وسندرس خواص هذا الفضاء وعلاقته مع فضاء الدوال القابلة للتكامل لبيكيا .

وسنبدأ بالقضية التالية :

قضية 2·1 : اذا كانت $f : S \to R$ دالة قابلة للقياس ، فان $|f|$ ، f^2 دالتان قابلتان للقياس . ولكل $c \in R$ ، الدالة cf والدالة $c + f$ قابلتان للقياس ايضا .

البرهان : لتكن $h : R \to R$ معرفة على النحو

$$h(y) = |y| \qquad \forall y$$

الدالة h مستمرة (لماذا ؟) . ولهذا فان الدالة hof قابلة للقياس (حسب القضية السابقة) . وبما ان

$$hof(x) = | f(x) |$$

نستنتج ان الدالة $|f|$ قابلة للقياس . سنترك برهان الاجزاء الاخرى من القضية للطالب كتمرين .

قضية 2·2 : اذا كانت كل من $f,g : S \to R$ دالة قابلة للقياس ، فكل من الدالتين $f + g$ و fg قابلة للقياس ايضا

لاجل البرهان نحتاج القضية المساعدة الاتية :

قضية مساعدة 2·3 : لتكن كل من $f,g : S \to R$ دالة قابلة للقياس . اذا كانت

$$S_1 = \{ x \varepsilon S \mid f(x) < g(x) \}$$
$$S_2 = \{ x \varepsilon S \mid f(x) > g(x) \}$$
$$S_3 = \{ x \varepsilon S \mid f(x) = g(x) \}$$

فان كلا من المجموعات S_1 و S_2 و S_3 مجموعة قابلة للقياس .

البرهان : لكل عدد نسبي r (اي $r \varepsilon Q$) ، ضع

$$E_r = \{ x \varepsilon S \mid f(x) < r < g(x) \}$$

من الواضح ان

$$E_r = f^{-1} (-\infty, r) \cap g^{-1} (r ,\infty)$$

ولهذا فان E_r مجموعة قابلة للقياس (اذكر الاسباب) .

ندعي الان ان $S_1 = \bigcup_{r \varepsilon Q} E_r$

من الواضح أن $\bigcup_{r \varepsilon Q} E_r \subseteq S_1$.

من الجهة الاخرى ، اذا كانت $x \varepsilon S_1$ ، يوجد $t \varepsilon Q$ بحيث أن $f(x) < t < g(x)$ (بسبب كثافة الاعداد النسبية) . وهذا يعني ان $x \varepsilon E_t$ ، وبالتالي $S_1 \subseteq \bigcup_r E_r$

والان بما أن كلا من E_r مجموعة قابلة للقياس ومجموعة الاعداد النسبية مجموعة قابلة للعد ، ينتج أن S_1 مجموعة قابلة للقياس (تذكر خواص المجموعات القابلة للقياس) .

بتبديل دور g,f في البرهان السابق ، نستطيع أن نبرهن أن S_2 بمجموعة قابلة للقياس .
وبملاحظة أن $S_3 = S - S_1 \cup S_2$
نستنتج ان S_3 مجموعة قابلة للقياس .
برهان القضية : لكل عدد حقيقي a ، الدالة $a - g$ قابلة للقياس (القضية الاخيرة) .

وعليه تكون المجموعة

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ x \varepsilon S \mid f(x) > a - g(x) \} \\ &= \{ x \varepsilon S \mid f(x) + g(x) > a \} \end{aligned}$$

قابلة للقياس (حسب القضية المساعدة) .
وبالمثل لكل عدد حقيقي b ، تكون المجموعة

$$\begin{aligned} S_2 &= \{ x \varepsilon S \mid f(x) < b - g(x) \} \\ &= \{ x \varepsilon S \mid f(x) + g(x) < b \} \end{aligned}$$

قابلة للقياس . بما أن

$$(f + g)^{-1} (a,b) = S_1 \cap S_2$$

وبما أن المجموعة $S_2 \cap S_1$ قابلة للقياس ، نستنتج أن الدالة $f+g$ قابلة للقياس (القضية 1·2) .
لاجل البرهنة على ان fg قابلة للقياس نلاحظ المتطابقة الاتية ثم نستخدم نتيجة القسم الأول من البرهان والقضية السابقة

$$fg = \frac{1}{4} [(f + g)^2 - (f - g)^2]$$

ملاحظة : اذا كانت S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس في R ، وكانت $M(S)$ تمثل مجموعة الدوال المقيدة القابلة للقياس على S ، فان القضايا السابقة تبين أن $M(S)$ فضاء خطي بالنسبة الى العمليات الاعتيادية على الدوال . وهذا الفضاء يحتوي على فضاء الدوال المستمرة المعرفة على S .

المبرهنة التالية تبين أن هذا الفضاء هوفضاء جزئي من فضاء الدوال القابلة للتكامل ليبيكيا .
مبرهنـــة 2·3:
اذا كانت S مجموعة مقيدة في R ، وكانت

$$f : S \to R$$

دالة مقيدة وقابلة للقياس فان الدالة f قابلة للتكامل ليبيكيا .

البرهان : لتكن

$$-M < f(x) < M \qquad \forall x \in S$$

لكل $n \in N$ ، نقسم الفترة $[-M,M]$ الى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول ، ولتكن نقاط التقسيم y_i حيث $0 \leq i \leq n$. من الواضح أن

$$y_i = -M + \frac{2M}{n} . i \qquad o \leq i \leq n$$

لكل i ، ضع

$$S_i = f^{-1} [y_{i-1} , y_i)$$

المجموعات S_i تستوفي الخواص التالية :

(أ) S_i مجموعة جزئية من S وقابلة للقياس لان الدالة f قابلة للقياس (القضية 1·2)

(ب) $\phi = S_j \bigcap S_i$ لكل $i \neq j$ (لماذا ؟)

(جـ) $S = \bigcup_i S_i$ (لماذا ؟)

ولهذا فان الطائفة $\{ S_i \}$ تكون تجزئة ليبيكية للمجموعة S . نرمز لهذه التجزئة بالرمز π_n . الان

$$L^{-} (f,\pi_n) - \underline{L} (f,\pi_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \mu (S_i)$$

$$\leq \sum_i \left(\frac{2M}{n} \right) \mu (S_i)$$

$$= \frac{2M}{n} . \mu (S)$$

ليكن الان $\varepsilon > o$. يوجد $k \in E$ بحيث ان

$$\frac{2M}{h} . \mu (S) < \varepsilon$$

ولهذا فان

$$L^{-}(f,\pi_k) - \underline{L}(f,\pi_k) < \varepsilon$$

وباستخدام القضية 3·4 ف10 تستنتج أن f قابلة للتكامل . وهذا يكمل البرهان .

مبرهنة 2·4 :

لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس في R ، ولتكن f دالة مقيدة وقابلة للقياس على S (ولهذا حسب المبرهنة السابقة تكون قابلة للتكامل) اذا كان

$$\int_s f = 0$$

وكانت $0 \leq f(x)$ لكل $x \in S$ ، يوجد مجموعة مهملة $S_o \subseteq S$ بحيث ان

اي أن

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \notin S_o$$

$$f(x) = 0 \quad \text{د . ت}$$

(ماهي المبرهنة المناظرة لهذه المبرهنة في التكامل الريماني ؟)

البرهان : لكل $k \in N$ ، لتكن

$$S_n = \{ x \in S \mid f(x) \geq \frac{1}{n} \}$$

بما ان الدالة f قابلة للقياس ، فان المجموعة S_n قابلة للقياس . وعليه ايضا المجموعة $S - S_n$ قابلة للقياس . كذلك الدالة f قابلة للتكامل على S ، ولهذا تكون قابلة للتكامل على كل من S_n و $(S - S_n)$.

(السبب ؟) وبما ان $0 \leq f(x)$ ، فان

$$\int_{s-s_n} f \geq 0$$

(السبب ؟) . وبما ان $\frac{1}{n} \leq f(x)$ على S_n ، فان

$$\int_{S_n} f \geq \frac{1}{n}\mu(S_n)$$

(لنفس السبب الاخير) . والان

$$0 = \int_S f = \int_{S_n} f + \int_{S-S_n} f \geq \frac{1}{n}\mu(S_n) \geq 0$$