الباب الأول

مفاهيم أساسية

١- مقدمة :

تعريف

المعادلة التفاضلية هى علاقة تساوى بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع ولـيكن $y(x)$ وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية ...... y', y'', أى أنها على الصورة العامة :

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية .

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x, y مستقلان ، وكان $z(x, y)$ ، متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من $x, \ y$ جزئياً ، سميت المعادلة المشـتملة علـى المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية ، معادلة تفاضلية جزئية ، وهى على الصورة :

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0$$

وعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية :

$$y'''^2 + 2y'^3 - 5y = \sin x \qquad (1)$$

$$y' + xy = x^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x \qquad (3)$$

نلاحظ أن المعادلتين (2) ,(1) كلاً منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة (3) معادلـة تفاضلية جزئية .

تعريف :

رتبة المعادلة *Order* : هى رتبة أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة .

درجة المعادلـة *Degree* : هى درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة بشـــرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية .

مثال :

من مجموعة المعادلات التفاضلية السابقة نجد أن المعادلة *(1)* من الرتبة الثالثة والدرجـــة الثانية بينما المعادلة *(2)* من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، أما المعادلة *(3)* فهى تفاضلية جزئية (ليست محل دراستنا) وهى من الرتبة الثانية والدرجة الأولى .

مثال :

أوجد رتبة ودرجة المعادلة $y''=(5-2y')^{3/2}=0$.

الحـــل :

المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية ...... لماذا ؟

تعريف :

حل المعادلة التفاضلية *Solution of D.E.* : تســمى الدالـــة $y = y(x)$ حـــلاً للمعادلـــة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^n) = 0$ إذا كانت :

١) قابلة للاشتقاق n مرة .

٢) تحقق المعادلة التفاضلية أى : $F(x, y(x), y'(x), \ldots\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

مثال :

أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت .

الحـــل :

$$y(x) = c \sin x, \qquad y'(x) = c \cos x, \qquad y''(x) = -c \sin x$$

وعلى ذلك نجد أن :

$$y''(x) + y(x) = -x \sin x + x \sin x = 0$$

مثال :

أثبت أن (1) .... $\ln y + \dfrac{x}{y} = c, \quad y > 0$ حيــث c ثابــت هــو حــل للمعادلــة

(2).................. $(y-x)\dfrac{dy}{dx}+y=0$.

الحـــل :

بتفاضل طرفى $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$ بالنسبة إلى x :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=0 \qquad y \neq 0$$

$$(y-x)\frac{dy}{dx}+y=0$$

أى أن المعادلة (١) حل للمعادلة (٢) .

٢- الحل العام والحل الخاص General Solution and Particular Solution :

الحَل العام لمعادل تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختياريــة وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

أما الحل الخاص هو أى حب يحقق المعادلة التفاضلية لايشتمل على أى ثوابت اختياريــة وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية فى الحل العام بقيم محددة .

مثال :

الحل العــام للمعادلــة $y''' - 5y' + 6y' = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2\, e^{2x} + c_3\, e^{3x}$ حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ونجد أن بعض الحلول الخاصة على الصور :

$$y = e^{2x} + e^{3x} \qquad y = 3 + 5\, e^{2x^2} \qquad y = 5 - 2\, e^{3x}$$

٣- تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت) :

إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n ، نجد أن ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_n) = 0 \qquad (I)$$

حيث $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ ثوابت اختيارية ، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطــى نجرى n من المشتقات للمعادلة (I) .

يكون لدينا $n+1$ من المعادلات عبارة عن المعادلة (I) بالإضافة إلى n معادلة من العمليات التفاضلية التى عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة .

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام $y = c \sin x$ ………………… (1)

الحـــل :

نفاضل مرة واحدة

$y' = c \cos x$ ………………… (2)

نحذف c من المعادلتين (2) , (1) بقسمة (2) على (1) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هى : $y' = y \cot x$.

حـل آخـر :

يمكن لحذف c من (2) , (1) نستخدم المحدد :

$$\begin{vmatrix} y & \sin x \\ y' & \cos x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y \cos x - y' \sin x = 0$$

$$\therefore \; y' = y \cot x$$

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ ………………………………………………………(1)

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

الحـــل :

بتفاضل (1) مرتين :

$y' = 2c_1 e^{2x} + 3 c_2 e^{3x}$ ……………………………………………………… (2)

$y'' = 4 c_1 e^{2x} + 9 c_2 e^{3x}$ ………………………………………………………(3)

لحذف c_1, c_2 :

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{3x} \\ y' & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ y'' & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow y\,(18\text{-}12) - y(9\text{-}4) + y'(3\text{-}2) = 0$$

$$\therefore \quad y'' - 5y' + 6y = 0$$

<u>مثال :</u>

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$$y = c_1 + c_2\,x + x^2$$

<u>الحـــل</u> :

نضع الحل العام على الصورة :

$$y - x^2 = c_1 + c_2\,x$$

ونفاضل هذا الحل مرتين ثم نحذف c_1, c_2 فنحصل على :

$$\begin{vmatrix} y - x^2 & 1 & x \\ y' - 2x & 0 & 1 \\ y'' - 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة هى :

$$\therefore\; y'' - 2 = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \qquad y'' = 2$$

٤- الشروط الابتدائية والشروط الحدية

Initial Conditions and Boundary Conditions

فى بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطى بعض الشروط التى يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية . وهذه الشروط هى التى تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية التى تظهر فى الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

مثال :

أوجد حل المعادلة $y' = 2x$ التى تحقق الشرط $y(2) = 3$.

الحـــل :

بتكامل المعادلة التفاضلية $y(x) = x2 + c$

بالتعويض فى الشرط $\therefore\ 3 = 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = -1$

$\therefore$ الحل المطلوب $y(x) = x^2 - 1$

والحل يعنى هندسياً ، منحنى يمر بالنقطة $(2, 3)$.

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلاً) يحتوى على ثابتين اختياريين ، لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة ، وهذان الشرطان يأخذا صوراً مختلفة ومنها :

١- إذا أعطى هذان الشرطان عند نفس النقطة x_o مثل :

$$y(x_o) = a \qquad , \qquad y'(x_o) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند xo ونسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية *Initial Value Problem* .

٢- إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_2) = y_2$, $y(x_1) = y_1$ كانت الشروط شروطاً حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية *Boundary Value Problem* .

ملحوظة : الصورة القياسية لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى فى الدالة المجهولة y هى $y' = f(x, y)$ والتى يمكن كتابتها على الصورة :

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

مثال :

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$y'' = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1$$

الحـــل :

بإجراء التكامل مرتين

$$y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

الذى يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة .

حيث $y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

بالتعويض فى الشروط الابتدائية :

$$y'(0) = -1 \quad \rightarrow \quad -1 = c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -1$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = c_2$$

ويكون حل المسألة المعطاة هو :

$$y = \frac{1}{6}\,x3 - x + 1$$

مثال :

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = 6x + 2$$

مع الشروط الحدية : $y(2) = 8$, $y(0) = 2$

الحـــــل :

بتكامل طرفى المعادلة مرتين بالنسبة إلى x ، نجد أن :

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

بالتعويض من الشروط الحدية فنحصل على :

$y(0) = 2 \qquad \therefore \boxed{2 = B}$

$y(2) = 8 \qquad \therefore 8 = 8 + 4 + 2A + 2 \qquad \boxed{A = -3}$

ويكون الحل المطلوب هو :

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

٥- نظرية الوجود والوحدوية لحل المعادلة التفاضلية العادية (بدون برهان)

سوف نعرض للنظرية الأساسية لوجود ووحدوية حل المعادلة التفاضلية العادية .

نظرية :

نفرض المعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x, y) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ونفرض الشرط الابتدائى $y(x_o) = y_o \quad \ldots\ldots (2)$

وإذا كانت الدالة $f(x, y)$ المعرفة في المنطقة المغلقة المحددة R:

$$R : |x-x_o| \le a \quad , \qquad |y-y_o| \le b$$

حيث a, b ثابتان ، تحقق :

١- الدالة $f(x, y)$ متصلة ومن ثم محدودة أى إذا وجد عدد موجب M فإن $|f(x,y)| \le M$.

٢- الدالة $f(x, y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة إلى y ومحدودة أى أن $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K$ حيث K عدد موجب .

فإن المعادلة (1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائى (2) فـــى المنطقـــة $|x-x_o| \le h$ ، حيث $h=\min\left(a, b/M\right)$.

مثال :

ابحث عن وجود حل وحيد للمسألة الابتدائية $y(0) = 0$; $y' = x^2 + y^2$.

الحـــــــل :

حيث أن $f(x, y) = x^2 + y^2$ دالة كثيرة حدود فى x, y .

إذن الحل بأى شروط ابتدائية يكون وحيداً .

نكون المستطيل R الذى مركزه $(0,0)$ أى :

$$R : |x| \le a \quad , \qquad |y| \le b \qquad \text{حيث} \quad a, b > 0$$

$$|f(x,y)| = |x^2+y^2| \le |x^2|+|y^2| = x^2+y^2 = M \quad , \quad h=\min\left(a, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

أى أن h تعتمد على a, b ، فإذا كانت مثلاً $a = b = 1$ نجد أن $h = \min(a, ½)$ أى أن $h = ½$ ، وبالتالى فإن المعادلة $y' = x^2 + y^2$ لها حل وحيد فى الفترة $|x| \le ½$ يحقق الشرط $y(0) = 0$.

ملحوظة : لبرهان هذه النظرية أنظر الجزء الثانى من الكتاب .

تمارين

١. حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية فى كل من :

1) $y''' - 3xy' + y = e^x + 1$

2) $t y'' + t y' + \cos\sqrt{y} = t^2 + 1$

3) $s^2 \dfrac{d^2 t}{ds^2} - s\dfrac{dt}{ds} + 3s = 0$

4) $2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^9 + y^3 - x = 0$

٢. ضع المعادلات التالية فى الصورة القياسية :

1) $x2\, y' + 3y = 0$

2) $x\, y' + \sin y + y = 3$

3) $\dfrac{x+y}{x-y} dx + 3dy = 0$

4) $dy - dx = 0$

٣. كون المعادلات التفاضلية العادية بحذف الثوابت a, b, c .

1) $y = a\,x^2 - bx + c$

2) $y = a\,e^{2x} + b\,e^x$

3) $y = a \sin 3x + b \cos 3x$

4) $\ln y = ax^2 + bx + c$

5) $y = A\,e^x + B\,e^{2x} + c\,e^{3x}$

6) $y = a\,e^x + b$