الفصل الثانى

معادلات تفاضلية

من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة :

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تكون على الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

أو $$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = 0$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم إحدى الطرق التالية المتاحة :

١- طريقة فصل المتغيرات ***Separation of Variables*** :

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة فى x فقط و $g(y)$ دالة فى y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

حيث C ثابت اختيارى ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختيارى على أى صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائى ، نستطيع حذف الثابت الاختيارى والحل الناتج يكون حلاً خاصاً .

مثال :

أوجد الحل العام والمنحنى الخاص الذى يمر بالنقطة $(0,0)$ للمعادلة التفاضلية .

$$e^x \cos y\, dx + (1 + e^x) \sin y\, dy = 0$$

الحـــــل :

بفصل المتغيرات ، وذلك بقسمة طرفى المعادلة المعطاة على $\cos y\,(1 + e^x)$ فنحصل على :

$$\therefore \frac{e^x}{1+e^x}dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

بالتكامل المباشر

$$\therefore \ln(1 + e^x) - \ln|\cos y| = \ln c$$

$$\therefore \ln\frac{(1+e^x)}{|\cos y|} = \ln c$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$1 + e^x = c\,|\cos y|$$

بالتعويض عن $x = 0,\ \ y = 0$

$\therefore\ 1 + 1 = c$ و $c = 2$

ويكون الحل الخاص

$$1 + e^x = 2\,|\cos y|$$

مثال :

أوجد معادلة المنحنيات التى تحقق المعادلة :

$$xy\,dy-\frac{1+y^2}{1+x^2}dx=0 \qquad \dots\dots\dots \qquad (1)$$

ثم أوجد حل المعادلة (1) التى تعطى شكلاً يمر بالنقطة $(1, -3)$.

الحـــــل :

بفصل المتغيرات نحصل على :

$$\frac{1}{1+y^2}dy-\frac{1}{x(1+x^2)}dx=0$$

باستخدام الكسور الجزئية ، ليكن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+b_2}{1+x^2}$$

$$1 = A\,(1+x_2) + (B_1x + B_2)\,x$$

وبمساواة الحد المطلق فى الطرفين نحصل على : $A = 1$

وبمساواة معامل x^2 فى الطرفين نحصل على : $B_1 = -1$ $\qquad A + B = \quad \Rightarrow$
0

وبمساواة معامل x فى الطرفين نحصل على : $B_2 = 0$

أى أن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

وتصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{y}{1+y^2}dy-\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right]dx=0$$

وبالتكامل المباشر نحصل على :

$\frac{1}{2} \ln (1+y^2) - \ln x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2) = \ln c$

أى أن :

$$\frac{(1+y^2)\,(1+x^2)}{x^2} = k \qquad , \qquad c^2 = k$$

عند $y = -3$, $x = 1$ يكون :

$$\frac{(10)(2)}{1} = k \quad \Rightarrow \quad k = 20$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص المطلوب هو :

$(1+x^2)\,(1+y^2) = 20\,x^2$

$1 - 19\,x^2 + x^2 y^2 + y^2 = 0$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة : $y' + e^x y = e^x y^2$

الحـــــل :

نكتب المعادلة على الصورة $y' = e^x (y^2 - y)$

ثم بفصل المتغيرات نحصل على :

$$e^x\,dx = \frac{1}{y(y-1)}\,dy$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن :

$$e^x\,dx = \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right] dy$$

ثم بالتكامل المباشر نحصل على :

$- e^x = \ln |y-1| - \ln |y| + c$

وهو الحل العام ...