٢- المعادلة التفاضلية المتجانسة *Homogeneous Equation*

يقال أن المعادلة التفاضلية $M(x,t)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

متجانسة إذا كان كل من M, N دالة متجانسة من نفس الدرجة ، علماً بأن :

$f(x,y)$ دالة متجانسة من درجة n إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \qquad , \lambda \in R$$

ومثال ذلك :

$$1)\ f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ متجانسة من درجة 2 .

$$2)\ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}} \qquad \Rightarrow \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^{3/2} f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ متجانسة من درجة $3/2$.

على ذلك فإن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن أن توضع على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

وحيث أن M, N متجانسة من نفس الدرجة نجد أن $f(x,y)$ متجانسة من درجة صفر .

أى أن من الممكن $f(x,y) = f(x/y)$.

الخلاصة :

المعادلة التفاضلية $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ تكون متجانسة إذا كانت كل من M, N متجانسة من نفس الدرجة .

أى أن المعادلة على الصورة $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ تكون معادلة متجانسة .

فى هذه الحالة نستخدم التعويض $\frac{y}{x} = v$ أى $y = xv$ وبالتالى $dy = x\,dv + v\,dx$ ثم تتحول المعادلة إلى معادلة يمكن فصل متغيراتها ، ثم تحل كما سبق .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة : $(x^2 + y^2)\,dx - 2\,xy\,dy = 0$

الحـــــل :

من الواضح أن المعادلة متجانسة .

$\therefore$ نستخدم التعويض $y = vx$ $\Leftarrow$ $dy = vdx + xdv$

$$\therefore\ (x^2+v^2x^2)\,dx - 2x^2v\,(vdx + xdv) = 0$$

$\therefore$ بالقسمة على x^2 نحصل على :

$$(1+v^2)\,dx - 2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

أى أن $\therefore\ [1+v^2-2v^2]\,dx - 2v\,x\,dv = 0$

أى $\therefore\ (1-v2)\,dx - 2v\,x\,dv = 0$

وبفضل المتغيرات نحصل على

$$\frac{1}{x}\,dx - \frac{2v}{1-v^2} = 0$$

$\therefore$ بالتكامل المباشر

$$\ln x + \ln(1-v^2) = \ln c$$

حيث أن : $v = \frac{y}{x}$

$$\therefore x\left[1 - \frac{y^2}{x^2}\right] = c \qquad x^2 - y^2 = cx$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال :

أوجد الصورة العامة للمعادلة : $y' = f(\frac{y}{x})$

الحـــــل :

حيث أن المعادلة متجانسة ، نضع $(\frac{y}{x}) = v \Rightarrow y = vx$

$$\therefore y` = v + xv`$$

$$\therefore v + x v` = f(v) \quad ) \; xv` = f(v) - v$$

أى أن $x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$

$$\therefore \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

أى أن الحل العام $\int \frac{dv}{f(v) - v} = \ln cx$

حيث $v = y/x$

مثال :

استخدم النتيجة السابقة فى حل المعادلة : $2x^2y` - y(2x+y) = 0$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة متجانسة .... لماذا ؟

$$\therefore y' = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

بوضع $y/x = v$

$$\therefore f(v) = v + \frac{1}{2}v^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(v) - v = \tfrac{1}{2}v^2$$

∴ حل المعادلة

$$\int \frac{dv}{\tfrac{1}{2}v^2} = \ln c\,x$$

$$\therefore \frac{-2}{v} = \ln c\,x$$

أى أن :

$$\frac{-2x}{y} = \ln c\,x$$

وهو الحل العام .

ولايجاد الحل الخاص نستخدم التعويض $y(e) = e$

$$\frac{-2e}{e} = \ln c\,e \qquad \Rightarrow \qquad -2 = \ln c + 1$$

$$\ln c = -3 \qquad \Rightarrow \qquad c = e^{-3}$$

∴ الحل الخاص

$$\frac{-2x}{y} = -3 + \ln x$$

أو

$$2x + y\ln x = 3y$$