معادلات تفاضلية عادية تؤول إلى معادلات متجانسة :

تكون هذه المعادلات التفاضلية العادية على الصورة :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \qquad (1)$$

حيث $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ثوابت :

إذا كان $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة التفاضلية (1) تؤول إلى المعادلة :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1y}{a_2x+b_2y} \qquad (2)$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة حيث أن كل من دالتى البسط والمقام متجانسة من الدرجة الأولى وفى هذه الحالة يمكن حل المعادلة (2) كما فى البند السابق .

لحل المعادلة التفاضلية العادية (1) فإننا نبحث فيما إذا كان الخطان المستقيمان

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

يتقاطعان أم لا يتقاطعان .

ولذلك سنناقش الحالتين كل على حدة .

الحالة الأولى :

إذا كان المستقيمان متقاطعان :

يتقاطع المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

إذا كان :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad or \quad a_1 b_2 = b_1 a_2$$

بافتراض أن نقطة تقاطع المستقيمان هى (h, k) فأننا نستخدم التعويض

$$y = v + k \qquad , \qquad x = u + h$$

حيث h, k ثوابت وعلى ذلك فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

وبالتعويض فى المعادلة (1) فإننا نحصل على :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v + (a_1 h + b_1 k + c_1)}{a_2 u + b_2 v + (a_2 h + b_2 k + c_2)} \qquad (4)$$

وحيث أن (h, k) نقطة تقاطع المستقيمان (3) ، أى أنها تقع على كل منهما وعليه فإن :

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$

$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

وعلى هذا فإن المعادلة التفاضلية (4) تأخذ الصورة :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} \qquad (5)$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى المتغيرين u, v ويمكن حلها كما سبق وذلك باستخدام التعويض $v = zu$ فتتحول المعادلة التفاضلية (5) إلى معادلة تفاضلية تحل بفصل المتغيرات ثم نستخدم التعويض $z = \frac{v}{u}$ ثم نعوض بعد ذلك عن كل من u, v حيث $u = x - h, \; v = y - k$ فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية (1) .

والآن سنعطى مجموعة من الأمثلة المحلولة .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية : $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-3}{x+y-2}$

الحـــل :

واضح أن المستقيمان

$$2x+y-3=0$$

$$x+y-2=0$$

متقاطعان وبحل هاتين المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هى $(1,1)$ نستخدم التعويض :

$$x=u+1$$

$$y=v+1$$

ومنها نجد أن $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dv}{du}=\frac{2(u+1)+(v+1)-3}{u+1+v+1-2}$$

$$=\frac{2u+v}{u+v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى u, v نستخدم التعويض $v=uz$ ومنها :

$$\frac{dv}{du}=v\frac{dz}{du}+z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u\frac{dz}{du}+z=\frac{2u+uz}{u+uz} \quad \Rightarrow \quad u\frac{dz}{du}+z=\frac{2+z}{1+z}$$

إذن :

$$u\frac{dz}{du}=\frac{2+z}{1+z}$$
$$=\frac{2+z-z+z^2}{1+z}=\frac{2-z^2}{1+z}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1+z}{2-z^2}dz=\frac{du}{u} \qquad (5)$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int\frac{1+z}{2-z^2}\,dz=\int\frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{dz}{2-Z^2}+\int\frac{z}{2-z^2}\,dz=\ln|u|+c_1$$

حيث c_1 ثابت اختيارى .

بالنسبة للتكامل $\int\frac{z\,dz}{2-z^2}$ نجد أن :

$$\int\frac{z\cdot dz}{2-z^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|2-z^2\right|+c_2$$

وبالنسبة للتكامل $\int\frac{dz}{2-z^2}$ باستخدام الكسور الجزئية فإننا نحصل على :

$$\frac{1}{2-z^2}=\frac{1}{(\sqrt{2}-z)(\sqrt{2}-z)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}-z}+\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}+z}$$

ومنها :

$$\int \frac{dz}{2-z^2} = \left(\sqrt{2}\big/4\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}-z} + \left(\sqrt{2}\big/4\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}+z}$$

$$= \left(-\sqrt{2}\big/4\right) \ln\left|\sqrt{2}-z\right| + \left(\sqrt{2}\big/4\right) \ln\left|\sqrt{2}+z\right| + c_3$$

مما سبق نجد أن الحل العام للمعادلة *(5)* هو :

$$\left(-\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\sqrt{2}-z\right| + \left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\sqrt{2}+z\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2-z^2\right| = \ln|u| + c$$

حيث $c = c_1 + c_2 + c_3$

ولكن $z = \frac{v}{u}$ فيكون الحل العام هو :

$$\left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\frac{u}{v}}{\sqrt{2}-\frac{v}{u}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2-\frac{v^2}{u^2}\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $u=x-1,\ v=y-1$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,(x-1)+y-1}{\sqrt{2}\,(x-1)-y+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\,(x-1)^2-(y-1)^2}{(y-1)^2}\right| = \ln|x-1| + c$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x + y - 3 = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

متقاطعان ، وبحل المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هى $(2, 1)$ نستخدم التعويض :

$x = u + 2$, $y = v - 1$

ومنها $\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$ وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نجد أن :

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+2+v+1-3}{u+2-v-1-1}$$
$$\Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى u, v نستخدم التعويض $v = uz$.

ومنها :

$$\frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u\frac{dz}{du} + z = \frac{u+uz}{u-uz} = \frac{1+z}{1-z}$$
$$\Rightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

وبفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{du}{u}$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int\frac{dz}{1+z^2} - \int\frac{z\,dz}{1+z^2} = \int\frac{du}{u} + c$$

حيث c ثبات اختيارى ومنها :

$$\tan^{-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $z = \frac{v}{u}$ فيكون الحل هو :

$$\tan^{-1}\frac{v}{u} - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $u = x-2 \quad , \quad v = y - 1$:

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\tan^{-1}\frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right| = \ln|x-2| + c$$

الحالة الثانية :

إذا كان المستقيمان متوازيان ، فإننا نفترض أن المستقيمان *(3)* متوازيان فإن شرط التوازى هو :

$$a_1 b_2 = a_2 b_1$$

وفى هذه الحالة نستخدم التعويض :

$$z = a_1 x + b_1 y \qquad or \qquad z = a_2 x + b_2 y$$

أيهما أكثر سهولة فى هذه الحالة بعد التعويض تتحول المعادلة التفاضلية العادية *(1)* إلى معادلة تفاضلية تحل بطريقة فصل المتغيرات والذى سنوضحه فى الأمثلة المحلولة الآتية :

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-5}{x+y+1}$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x + y - 5 = 0$$
$$x + y + 1 = 0$$

متوازيين . نستخدم التعويض :

$$z = x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z-5}{z+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-5}{z+1} + 1 = \frac{2z-4}{z+1}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int \frac{z+1}{2z-4} dz = \int dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} z + \frac{3}{2} \ln|z-2| = x + c$$

ولكن $z = x+y$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2} \ln|x = y - 2| = x + c$$

حيث c ثابت اختيارى .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية :
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان

$$2x + y - 1 = 0$$

$$4x + 2y + 5 = 0$$

متوازيان ، نستخدم التعويض :

$$z = 2x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z-1}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{z-1}{2z+5}+2=\frac{5z+9}{2z+5}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int\frac{2z+5}{5z+9}dz=\int dx+c$$

ومنها :

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+c$$

ولكن $z=2x+y$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln|10x+5y+9|=x+c$$

حيث c ثابت اختيارى .

٣- المعادلات التفاضلية التامة *Exact Differential Equations*

تعريف : **التفاضلة التامة** :

التفاضلة التامة للدالة $f(x, y)$ تكون على الصورة :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

وإذا كانت مساوية الصفر فإن :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \qquad (1)$$

تسمى معادلة تفاضلية تامة ، ونلاحظ أن :