$$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z-1}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{z-1}{2z+5}+2=\frac{5z+9}{2z+5}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int\frac{2z+5}{5z+9}dz=\int dx+c$$

ومنها :

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+c$$

ولكن $z = 2x + y$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln|10x+5y+9|=x+c$$

حيث c ثابت اختيارى .

٣- المعادلات التفاضلية التامة *Exact Differential Equations*

تعريف : **التفاضلة التامة** :

التفاضلة التامة للدالة $f(x, y)$ تكون على الصورة :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

وإذا كانت مساوية الصفر فإن :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \qquad (1)$$

تسمى معادلة تفاضلية تامة ، ونلاحظ أن :

$df(x, y) = 0$ أى أن حلها يكون $f(x, y) = c$

حيث c مقدار ثابت .

فإذا كان لدينا المعادلة التفاضلية .

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

فإنها تكون تامة بالمقارنة بالمعادلة *(1)* التامة إذا كان :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad (3), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N \qquad (4)$$

السؤال الآن ما الشرط الضرورى حتى تكون المعادلة *(2)* تامة ؟

بتفاضل *(3)* جزئياً بالنسبة إلى y وتفاضل *(4)* جزئياً بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومع اعتبار أن المشتقات الجزئية للدالتين N, M متصلة فإن الشرط الضرورى حتى تكون المعادلة *(2)* تامة هو : $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

ولحل المعادلة التامة *(2)* نفترض دالة مَا $f(x, y)$ تحقق :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

فيكون حلها $f(x, y) = c$ حيث c ثابت .

وتحقق $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M \,............(3), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = N \,.............(4)$

بإجراء التكامل على المعادلة *(3)* بالنسبة إلى x .

$$\therefore f(x,y) = \int^{x} M(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (5)$$

حيث نلاحظ أن $\varphi(y)$ مقدار ثابت بالنسبة إلى x .

ثم بتفاضل طرفى *(5)* جزئياً بالنسبة إلى y واستخدام المعادلة *(4)* ينتج أن :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx + \varphi'(y) = N$$

أى أن

$$\varphi'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx$$

سوف نلاحظ أن الطرف الأيمن فى المعادلة الأخيرة دائماً دالة فى y فقط ... (لماذا) ؟

وبتكامل طرفى المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى y ، نستنتج شكل الدالة $\varphi'(y)$ حيث :

$$\varphi(y) = \int^{y} N(x,y)dy - \int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx\right]dy$$

وبالتعويض فى المعادلة *(5)* نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة *(2)* ويكون على الصورة :

$$\int^{x} M(x,y)dx + \int^{y} N(x,y)dy - \int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx\right]dy = C \qquad (6)$$

مثال :

أوجد حل للمعادلة :

$$(6x^2 + 4xy + y^2)\,dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy = 0$$

الحـــــل :

نفترض أن : $M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2$

$N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$

نوجد $\frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y$

أى أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

وعلى ذلك تكون المعادلة المعطاة تامة ، وبالتالى فإن :

$$\int^{x} M(x,y)dx = 2x^3 + 2x^2y + xy^2$$

$$\int^{y} N(x,y)dy = 2x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx = 2x^2 + 2xy \quad \Rightarrow \quad \int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)dx\right]dy = 2x^2y + xy^2$$

يكون حل المعادلة (باستخدام القانون) هو :

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 - 2x^2y - xy^2 = C$$

أى أن :

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = C$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة .

ملحوظة (١) : يمكن حل المعادلة التفاضلية التامة *(2)* باستخدام القانون :

$$\int^{x} M\,dx + \int^{y} N\,dy - \int^{x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int^{y} N\,dy\right]dx = C$$

ويعطى نفس النتيجة المطلوبة .

ملحوظة (٢) : المثال الأخير يمكن حله باعتبار المعادلة تفاضلية متجانسة .

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2\ln 3x + \frac{3}{y}$$

أى أن المعادلة غير تامة .

لكن بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{1}{x}$

نجد أن المعادلة المعطاة تصبح على الصورة :

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})dx + (2\ln 3x + \frac{3}{y})dy = 0$$

نفترض أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}$

أى بضرب طرفى المعادلة الأصلية فى $\frac{1}{x}$ تصبح تامة ، وهذا المقدار $\frac{1}{x}$ يسمى عامل التكامل *(integrating factor)* الذى يجعل المعادلة تامة .

٤- طريقة تعيين عامل التكامل $I(x,y)$:

إذا كانت المعادلة $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ غير تامة بضرب طرفى المعادلة فى $I(x,y)$ تصبح تامة .

أى أن المعادلة $I\,M\,dx + I\,N\,dy = 0$ تامة ، حيث I, M, N دوال فى x, y .

$\therefore$ يتحقق الشرط $\frac{\partial (IM)}{\partial y} = \frac{\partial (IN)}{\partial x}$

$$\therefore I\,M_y + I_y M = I\,N_x + I_x N$$

مع ملاحظة أن $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

$$I\left[M_y - N_x\right] = I_x N - I_y M \qquad (I)$$

الآن نفترض حالات خاصة لعامل التكامل $I(x,y)$

١) $I(x, y) = I(x)$:

أى أن I دالة فى x فقط .

$$I_x = \frac{d\mu}{dx} \qquad , \qquad I_y = 0$$

تصبح المعادلة (I) :

$$I\left[M_y - N_x\right] = N\,\frac{d\mu}{dx}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{dI}{I} = \frac{M_y - N_x}{N}dx$$

مع ملاحظة أن $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$ (دالة فى x فقط) وبتكامل الطرفين نحصل على :

$$\ln I = \int p(x)dx$$

أى أن $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ أو $I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx}$.

٢) $I(x, y) = I(y)$:

أى أن I دالة فى y فقط

$$I_y = \frac{dI}{dy} \qquad , \qquad I_x = 0$$

وبالتعويض فى (I) نستنتج أن :

$$I(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}dy}$$

حيث نلاحظ أن $\frac{M_y - N_x}{-M}$ (دالة فى y فقط) .

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$(3x^3+2y)dx+(2x\ln 3x+\frac{3x}{y})dy=0$$

الحـــــل :

نفترض $N=2x\ln 3x+\frac{3x}{y}$, $M=3x^3+2y$ فيكون :

$$M_y=2 \quad , \quad N_x=2+2\ln 3x+\frac{3}{y}$$

أى أن : $M_y-N_x=-(2\ln 3x+\frac{3}{y})\neq 0$

∴ المعادلة غير تامة

لكن :

$$\frac{M_y-N_x}{N}=-\frac{(2\ln 3x+3/y)}{x(2\ln 3x+3/y)}=-\frac{1}{x}=p(x)$$

∴ يكون عامل التكامل :

$$I(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{1}{x}$ تصبح تامة على الصورة

$$(3x^2+\frac{2y}{x})dx+(2\ln 3x+\frac{3}{y})dy=0$$

بافتراض أن : $M=3x^2+\frac{2y}{x}$, $N=2\ln 3x+\frac{3}{y}$

$$\int^{x} M\,dx = x^{3} + 2y\ln x$$

$$\int^{y} N\,dy = 2y\ln 3x + 3\ln y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M\,dx = 2\ln x \qquad \Rightarrow \qquad \int^{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M\,dx\right)dy = 2y\ln x$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$x^{3} + 2y\ln x + 2y\ln 3x + 3\ln y - 2y\ln x = C$$

أى أن

$$x^{3} + 2y\ln 3x + 3\ln y = C$$

حيث C ثابت اختيارى .

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y\,(2x+y)\,dx + (3x^{2} + 4xy - y)\,dy = 0$$

<u>الحـــــل :</u>

ليكن :

$$M = y(2x+y) \quad , \qquad N = 3x^{2} + 4xt - y$$

فإن

$$M_y = 2x + 2y \qquad , \qquad N_x = 6x + 4y$$

وبالتالى :

$$M_y - N_x = -4x - 2y = -2(2x+y) \neq 0$$

أى أن المعادلة المعطاة غير تامة .

نوجد عامل التكامل I

نجد أن

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-2(2x+y)}{-y(2x+y)} = \frac{2}{y}$$ دالة فى y فقط فيكون :

$$I = I(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{\ln y^2} = y^2$$

بضرب طرفى المعادلة فى $y2$ تصبح تامة على الصورة :

$$y^3 (2x+y)\, dx + y^2(3x^2 + 4xy - y)\, dy = 0$$

ونفترض أن $M = 2xy^3 + y^4 \quad , \quad N = 3x^2y^2 + 4\,x\,y^3 - y^3$

وعلى ذلك فإن

$$\int^x M\, dx = x^2 y^3 + xy^4 + xy^4 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\int^x M\, dx = 3x^2 y^2 + 4xy^3$$

$$\therefore \int^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int^x M\, dx \right) dy = x^2 y^3 + xy^4$$

$$\int^y N\, dy = x^2 y^3 = xy^4 - \frac{1}{4} y^4$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$x^2 y^3 + xy^4 + x^2 y^3 + xy^4 - \frac{1}{4} y^4 - x^2 y^3 - xy^4 = C$$

أى أن : $$x^2 y^3 + xy^4 - \frac{1}{4} y^4 = C$$