٥- المعادلات التفاضلية الخطية

تعريف

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته فى المعادلة مــن الدرجــة الأولى .

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى تكون :

$$\frac{dy}{dx} + P'(x)y = Q(x) \qquad (I)$$

وتسمى خطية فى y .

والمعادلة من الرتبة الأولى خطية فى x على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y)x = \beta(y)$$

ولإيجاد حل للمعادلة (I) ، نضعها على الصورة :

$$[P(x)y - Q(x)]\ dx + dy = 0$$

ونحاول أن نجعلها تامة ، فنفترض :

$$M = P(x)\ y - Q(x) \qquad , \qquad N = 1$$
$$M_y = P(x) \qquad\qquad N_x = 0$$
$$M_y - N_x = P(x) \neq 0$$

أى أن المعادلة غير تامة ، ونجد أن :

$$I = I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int P(x) dx}$$

وهو عامل التكامل (عامل المكاملة) .

بضرب طرفى المعادلة فى $I(x)$ تصبح تامة .

$$e^{\int P(x)\,dx} P(x) y\, dx + e^{\int P(x)\,dx}\, dy = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\, dx$$

أى أن :

$$d[e^{\int P(x)\,dx}\, y] = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\, dx$$

وبتكامل الطرفين نحصل على حل المعادلة على الصورة :

$$e^{\int P(x)\,dx}\, y = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\, dx + C$$

حيث c ثابت التكامل .

ويمكن تبسيط شكل الحل كما يلى :

$$I(x) y = \int I(x)\; Q(x) + C$$

حيث :

$$I(x) = e^{\int P(x) dx}$$

ويمكن استنتاج صورة حل المعادلة الخطية

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y) x = \beta(y)$$

ويكون حلها هو :

$$I(y)\, x = \int I(y)\, \beta(y)\, dy + K$$

حيث K ثابت التكامل ، وعامل التكامل هو :

$$I(y) = e^{\int \alpha(y) dy}$$

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

الحـــــل :

المعادلة خطية فى y .

نضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) \qquad (1)$$

أى أن (2) $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^2$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$P(x)=\frac{2}{x} \qquad , \qquad Q(x)=x^2$$

نوجد

$$1) \quad \int P(x)\,dx=\int\frac{2}{x}\,dx=\ln x^2$$

$$\therefore \quad I(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\ln x^2}=x^2$$

$$2) \quad \int\mu(x)\,Q(x)\,dx=\int x^2x^2dx=\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو :

$$I\,y=\int I\,Q\,dx+C$$

أى أن :

$$x^2y=\frac{1}{5}x^5+c$$

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(y+y^2)\,dx-(y^2+2xy+x)\,dy=0$$

ثم أوجد الحل الخاص الذى يحقق أن $y=1$ عندما $x=3$.

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة خطية فى x .... (لماذا ؟)

نضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dx}{dy}+\alpha(y)x=\beta(y) \qquad (1)$$

بقسمة طرفى المعادلة على $(y+y2)\, dy$ نحصل على :

أى أن

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2y+1}{y+y^2}\,x=\frac{y^2}{y+y^2} \qquad (2)$$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$\alpha(y)=-\frac{2y+1}{y^2+y} \qquad , \qquad \beta(y)=\frac{y^2}{y^2+y}=\frac{y}{y+1}$$

$$I(y)=e^{-\int\frac{2y+1}{y^2+y}dy}=e^{-\ln(y^2+y)}=e^{\ln\left(\frac{1}{y^2+y}\right)}=\frac{1}{y^2+y}$$

$$\int I(y)\,\beta(y)\,dy=\int\frac{1}{y^2+y}\cdot\frac{y}{y+1}\,dy=\int\frac{1}{(y+1)^2}\,dy=-\frac{1}{y^2+1}$$

ويكون حل المعادلة هو

$$I(y)\,x=\int I(y)\,\beta(y)\,dy+C$$

أى أن

$$\frac{1}{y^2+y}\,x=-\frac{1}{y+1}+C$$

$$\therefore\ x=-y+C\,(y^2+y)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

ولحساب الحل الخاص ، نضع $x=3$, $y=1$ فنحصل على :

$$3=-1+2C \qquad \Rightarrow \qquad C=2$$

ويكون الحل الخاص هو :

$$x=-y+2\,(y^2+y)$$

أو

$$2y^2+y=x$$

ملحوظة :

١- عند حل المعادلة الخطية وتعيين المعامل المكامل I يجب أن تكون المعادلة على نفس الصورة المعروفة أى معامل $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ أو معامل $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ هو الواحد الصحيح .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' = {y^2}\big/{(1-3xy)}$$

الحـــل :

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x}{y}$$

أى أن

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2}$$

ويكون المعامل المكامل هو :

$$I = e^{\int \frac{3}{4} dy} = \ln y^3 = y^3$$

ويكون الحل العام هو :

$$Ix = \int I\,Q\,dy + C$$

$$y^3 x = \int \frac{1}{y^2} y^3\,dy + C = \frac{y^2}{2} + C$$

حيث C ثابت اختيارى .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=4y+3$$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة المعطاة خطية فى x حيث :

$$P(y)=\frac{2}{y} \qquad , \qquad Q(y)=4y+3$$

المعامل المكامل I هو :

$$I=e^{2\int\frac{1}{y}dy}=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2$$

ويكون الحل العام هو :

$$Ix=\int I\,Q\,dy+C$$

$$y^2x=\int y2(4y=3)dy+C$$

$$=y^4+y^3+C$$

أى أن الحل العام هو :

$$yx=y^2+y+\frac{C}{y^2}$$