٦- معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية :

١- معادلة برنوللى *Bernoulli's Equation*

تكون المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$$

حيث $n \neq 0, 1$ تسمى معادلة برنوللى ، n عدد حقيقى .

وهذه المعادلة يمكن أن تتحول إلى معادلة خطية :

١- بالقسمة على y^n نجد أن :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x) \qquad (1)$$

٢- نفترض أن $z = y^{-n+1}$ ثم باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

٣- بضرب طرفى (1) فى $(-n+1)$ والتعويض عن y بدلالة z نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,P(x)\,z=(-n+1)\,Q(x)$$

٤- نضع $(-n+1)\,P(x)=p(x)$, $(-n+1)\,Q(x)=q(x)$

تصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{dz}{dx}+p(x)\,z=q(x)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية فى z .

٥- حل المعادلة هو :

$$I(x)\,z=\int I(x)\,q(x)\,dx+C$$

٦- ثم باستبدال $z = y^{-n+1}$ ، نحصل على الحل المطلوب :

$$I(x)\, y^{-n+1} = \int I(x) \quad q(x)\ dx + C$$

حيث

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$dy + 2xy\, dx = xe^{-x^2} y^3\, dx$$

الحـــــل :

يمكن وضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + 2\,x\,y = xe^{-x^2} y^3$$

وهى معادلة برنوللى

.:. بالضرب فى y^{-3} نحصل على :

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = xe^{-x^2} \qquad (1)$$

بوضع $z = y^{-2}$ نجد أن :

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

بضرب المعادلة (1) فى 2- والتعويض عن y بدلالة z فيكون :

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = 2xe^{-x^2}$$

وهى معادلة خطية على الصورة

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\, z = q(x)$$

أى أن :

$$p(x) = -4x \quad , \quad q(x) = -2x\,e^{-x^2}$$

$$\int p(x)dx = -2x^2$$

$$I(x) = e^{-2x^2}$$

فيكون

$$\int I(x)\,q(x)\,dx = \int e^{-2x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right)dx$$

$$= -2\int xe^{-3x^2}\,dx = \frac{1}{3}e^{-3x^2}$$

.·. حل المعادلة على الصورة

$$I(x)z = \int \mu(x)\,q(x)\,dx + c$$

أى أن

$$e^{-2x^2}z = \frac{1}{3}e^{-3x^2} + c$$

وحيث أن $z = y^{-2}$ فيكون :

$$e^{-2x^2}y^{-2} = \frac{1}{3}e^{-3x^2} + c$$

أو

$$e^{x^2}y^{-2} = \frac{1}{3} + c\,e^{3x^2}$$

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = -2e^x y^2$$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة المعطاة فى صورة معادلة برنوللى وبالضرب فى y^2 نحصل على :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y^{-1} = -2e^x$$

نضع $y^{-1} = z$ فيكون $-y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$

بضرب المعادلة فى *(-1)* وبالتعويض عن y بدلالة z تصبح المعادلة على الصورة .

$$\frac{dz}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) z = 2e^{x}$$

وهى معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\, z = q(x)$$

حيث $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $q(x) = 2e^{x}$

فيكون :

$$\int p(x)\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln x$$

$$I(x) = e^{x + \ln x} = x\, e^{x}$$

$$\int I(x)\, q(x)\, dx = \int x\, e^{x}\, 2\, e^{x} dx$$

$$= \int 2\, x\, e^{2x}\, dx$$

بالتكامل بالتجزئ

$$u = 2x \qquad dv = e^{2x} dx$$

$$du = 2dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int I\, q\, dx = x\, e^{2x} - \int e^{2x} dx = x\, e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

حل المعادلة $I\, z = \int I\, q\, dx + c$

أى أن $x\, e^{2x} z = e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

حيث أن $z \neq y^{-1}$

.: الحل العام $\dfrac{x}{y} e^{x} = e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

تمارين

٣) فصل المتغيرات :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائى :

1) $(x-1)dy+(y-2)dx=0$

2) $2x(1+y^2)dx-y(1+2x^2)dy=0$

3) $y'-2y=y^2 \quad ; \; y=3 \quad ,x=0$

4) $t\,\dfrac{dr}{dt}=-2r \qquad ; \; r\left(-\frac{1}{3}\right)=9$

5) $x^3\,dy+xydx=x^2dy+2ydx \quad ; \quad y(2)=e$

6) $3e^x\tan y+(1+e^x)\sec^2 y \quad y'=0 \quad ; \; y=\dfrac{\pi}{4} \; , \quad x=\ell n2$

7) $y'+2x\sqrt{1-y^2}=0$

8) $x^2 e^{\,x3-y2}+yy'=0 \quad ; y(0)=0$

9) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0 \quad ; y(0)=1$

٤) المعادلات المتجانسة :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائي :

1) $(2x-3y)dx-(2y+3x)\,dy=0$

2) $ydx+(2x+3y)\,dy=0$

3) $xy^2dy-(x^3+y^3)\,dx=0$

4) $y'=\dfrac{4x+3y+2}{3x+2y+1}$

5) $y' = \dfrac{-2x+2y}{y-1}$

6) $y' = \dfrac{3y-7x+2}{7x-3y-3}$

7) $y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-5}$

8) $y' = \dfrac{x-3y+2}{3x-9y-12}$

9) $y' = \dfrac{2x+2y+1}{x+y-1}$

10) $\left(x + y\sin\frac{y}{x}\right)dx - x\sin\dfrac{y}{x}\,dy = 0 \quad ; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

11) $y\left(x^2+xy-2y^2\right)dx + x\left(3y^2-xy-x^2\right)dy = 0$

12) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

13) $y' = \dfrac{6x-3y+2}{2x-y-1}$

14) $y' = \dfrac{xy}{x^3-y^2}$

15) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

16) $xy' = y + \sqrt{4x^2+y^2} \quad ; \; y(1)=0$

17) $y' = \dfrac{3x-2y+4}{2x+7y-1}$

٥) المعادلات التفاضلية التامة ومعادلات تؤول إلى التامة:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصـا يحقـق الشـرط الابتدائي (إذا وجد) :

1) $\left(3x^2+3xy^2\right)dx - \left(3y^2-2y-3x^2y\right)dy = 0$

2) $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$

3) $y(x-1)^{-1}\,dx + \left[\ell n(2x-2) + \frac{1}{y}\right]dy = 0$

4) $2\frac{x}{y}dy + \left(2\ell n5y + \frac{1}{x}\right)dx = 0$

5) $ex^2(dy + 2xydx) = 3x^2dx$

6) $y^3\sin 2x\,dx - 3y^2\cos^2 x dy = 0$

7) $\frac{3y^2}{x^2+3x}dx + \left(2y\ell n\frac{5x}{x+3} + 3\sin y\right)dy = 0$

8) $(1-xy)dx - (x^2 - xy)dy = 0$

9) $xdy + \cos y(\sin y - 3x^2\cos y)\,dx = 0$

10) $2xydx - (3x^2 - y^2)dy = 0$

11) $(x2 + y2 + x)\,dx + xydy = 0 \quad ; \quad y(-1) = 1$

12) $4xtdx + (4x^2 + 3t) = 0 \quad ; \quad x(1) = 0$

13) $r(t^2 + r^2 + 2t)dt + (t^2 + 3r^2)\,dr = 0$

14) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y + x^2y^2 + 3x)dy = 0$

٦) معادلات تفاضلية خطية ومعادلات تؤول إلى خطية :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصا يحقق الشرط الابتدائي (إذا وجد) :

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3 - 3$

2) $\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}x = 2t$.

3) $x^2y' - 2xy = x^4 + 3 \quad ; y(1) = 2$

4) $ydx - 4xdy = y^6dy \quad ; x(1) = 4$

5) $t\,ds = (3t+1)s\,dt + t^3 e^{3t}\,dt$.

6) $xdy + ydx = 2(x - x^2 y)dx$

7) $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

8) $y' + \dfrac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y}$.

9) $\dfrac{dx}{dt} + 3t^2 x = x^2 t e^{t3}$

10) $3dy - ydx = 3y^3 e^{\frac{4x}{3}}\,dx$

11) $(12e^{2x}y^2 - y)dx = dy \quad ; \; y(0) = 1$

12) $\dfrac{dx}{dy} - 2xy = ye^{-3y2}\left\{xe^{-y2} + 3(xe^{-y2})^2\right\}$ (استخدم التعويض $xe^{-y2} = Z$)

13) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ (حل خاص $y = \dfrac{1}{x}$)

14) $x\dfrac{dy}{dx} = 2(x-y)^2 + (x-y) + x$ (حل خاص $y = x$)

15) $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy + x^2y^2 = 4$ (حل خاص $y = \dfrac{-2}{x}$)

16) $y' + 2ye^x + y^2 = e^{2x} + e^x$ (حل خاص $y = e^x$)

تمارين عامة

أوجد الحل :

1) $xdx - y^2dy = 0$

2) $y' = y^2x^3$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{2y}$

4) $dy = 2t\left(y^2+9\right)dt$

5) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{y} \quad ; \; y(0) = 1$

7) $y' = \dfrac{y+x}{x}$

8) $y' = \dfrac{x^4+2y^4}{xy^3}$

9) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

10) $\left(x^2+y^2\right)dx - xydy = 0 \quad ; \; y(1) = -2$

11) $\left(x+\sqrt{xy}\right)dy - ydx = 0$

12) $2xydx + \left(1+x^2\right)dy = 0 \quad ; \; y(1) = -5$

13) $\left(2y - xe^{xy}\right)dy - \left(2 + ye^{xy}\right)dx = 0$

14) $y^2dt + (2yt+1)dy = 0 \quad ; \; y(1) = -2$

15) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x^2(x-1)}{4x^3+6x^2t+2xt^2} \quad ; \; x(2) = 3$

16) $xy^2dx + x^2y(y+1)dy = 0$