الباب الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

١- مقدمة :

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية فى المتغير y (المتغير التابع) إذا كان $y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}$ من الدرجة الاولى وتكون على الصورة العامة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} y + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

حيث $a_o \neq 0$

فاذا كانت جميع المعاملات $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ قيم ثابتة، سميت المعادلة خطية ذات معاملات ثابتة ، اما اذا كانت واحدة على الاقل من المعاملات دالة فى x سميت المعادلة ذات معاملات متغيرة .

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

خطية متجانسة ، حيث $f(x)=0$ فى المعادلة (1)

ملحوظة هامة :

إذا كانت $f(x) \neq 0$ فان المعادلة (1) تكون خطية غير متجانسة

تعريف : المؤثر التفاضلى D :

نعرّف $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ اى المشتقة الاولى بالنسبة الى x .

كذلك فان :

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}\ ,\quad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$$

مثال

$$D\,e^{3x} = \frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$D^2\,e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2}e^{3x} = 9\,e^{3x}$$

بعض خواص المؤثر D :

1) $D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$

2) $D[kf(x)] = kDf(x)$

3) $F(D)\,e^{\alpha x} = F(\alpha)\,e^{\alpha x}$; F كثيرة حدود فى D

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (1) باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1}D + a_n)\,y = f(x)$$

حيث نجد ان

$$\Phi(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n$$

دالة كثيرة حدود فى D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة الرمزية :

$$\Phi(D)\,y = f(x)$$

وهى معادلة خطية غير متجانسة، أما المعادلة

$$\Phi(D)y = 0$$

فهى معادلة خطية متجانسة .

وسوف ندرس الآن بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية .

٢- خواص حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

نفترض أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$$

نظرية :

إذا كان كل من y_1 , y_2 حل خاص للمعادلة (1) فان $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ حل أيضا للمعادلة (1) ،حيث $c_1 ,\ c_2$ ثابتان .

البرهان : يترك للطالب

تعريف :

١) الحلان y_1 , y_2 للمعادلة (1) مستقلان خطياً اذا كان $\dfrac{y_2}{y_1} \neq c$ (ثابت)

اى ان $y_2 \neq c\, y_1$

٢) الحلان y_1 , y_2 للمعادلة (1) مرتبطان خطياً اذا كان $\dfrac{y_2}{y_1} = c$ (ثابت)

اى ان $y_2 = c\, y_1$

تعريف (الرونسكيان) : *Wronskian*

اذا كان $y_1(x), y_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فى نطاق تعريفهما ، فاننا نعرف الرونسكيان لهما كما ياتى :

$$W\{y_1(x),\ y_2(x)\}=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

تعريف :

١) الحـــلان $y_1,\ y_2$ للمعادلـــة *(1)* مرتبطـــان خطيـــاً إذا وفقـــط إذا كـــان $W\{y_1,\ y_2\}\equiv 0$.

٢) الحـــلان $y_1,\ y_2$ للمعادلـــة *(1)* مســـتقلان خطيـــاً إذا وفقـــط إذا كـــان $W\{y_1,\ y_2\}\neq 0$.

مـــثال :

ابحث إرتباط واستقلال كل مجموعة من الدوال الآتية :

1) e^x, e^{-x} 2) $1, x, x^2$ 3) $e^x, 2e^x, x$

الحـــل :

1) $$W\{e^x,\ e^{-x}\}=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2\neq 0$$

$\therefore$ الدالتان مستقلتان خطياً .

$$2)\quad W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

الدوال مستقلة خطياً

$$3)\quad W\{e^x, 2e^x, x\} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & x \\ e^x & 2e^x & 1 \\ e^x & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

∴ الدوال مرتبطة خطياً .

تعريف : الحل العام :

إذا كان y_1 , y_2 حلين مستقلين للمعادلة *(1)* فان $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة *(1)* ، حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

نفترض أن المعادلة

$$y'', a_1 y', a_2 y = 0 \qquad (1)$$

حيث $a_1,\ a_2$ ثابتان.

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة ، نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة *(1)* حيث λ مقدار ثابت .

نضع المعادلة على الصورة $\left(D^2 + a_1 D + a_2\right) y = 0$

ثم نعوض بالحل المفروض

$$Dy = De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \qquad , D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

نحصل على المعادلة

$$\left(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2\right) e^{\lambda x} = 0$$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) *(Auxiliary characteristic)* ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1 , λ_2

حيث

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

١) حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

٢) حقيقيان متساويان $\lambda_1 = \lambda_2$.

٣) مركبان .

سوف ندرس كل حالة على حده .

١) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً ..... لماذا ؟

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 3D - 4)\, y = 0$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

اى ان $\lambda = -4 \quad , \quad \lambda = 1$

يكون الحل العام على صورة $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $2y'' - 3y' = 0$

نضع المعادلة على صورة $(2D^2 - 3D)\ y = 0$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $2\lambda^2 + 3\lambda = 0$

و تكون جذورها $\lambda = 0 \ , \ {}^{3}\!/_{2}$

ويكون الحل العام صفر

اى ان $y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{{}^{3}\!/_{2} x}$

$$y = c_1 + c_2 e^{{}^{3}\!/_{2} x}$$

---

٢) **جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان** :

اى أن $\lambda_1 = \lambda_2$ فى هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل أخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يمثل حلا للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك ، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

او

$$y = (c_1 + c_2 x)\ e^{\lambda x}$$

حيث $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 - 4D + 4)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

∴ المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

ويكون جذراها $\lambda = 2, 2$

أى أن الحل العام $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

---

٣) **جذرا المعادلة المميزة مركبان** :

اذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فان الجذر الآخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (1)$$

حيث $A_1,\ A_2$ ثابتان اختياريان .

ويمكن اثبات ان الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$$

ولإثبات ذلك :

نضع الحل *(1)* على صورة

$$y = A_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left[A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}\right]$$

ونعلم ان

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \ , \ e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$$

وعلى ذلك فان

$$y = e^{\alpha x}[A_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + A_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}[(A_1 + A_2)\cos\beta x + i(A_1 - A_2)\sin\beta x]$$

ونعتبر

$$A_1 + A_2 = C_1 \ , \quad i(A_1 - A_2) = C_2$$

فيكون الحل هو :

$$y = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x]$$

<u>مثـــال :</u>

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

<u>الحـــل :</u>

نضع المعادلة على صورة

$$(D^2 + 2D + 4)\,y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\therefore \ \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة

$$y = e^{-x}[c_1\cos 2x + c_2\sin 2x]$$

<u>مثـــال :</u>

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 9y = 0$

<u>الحـــل :</u>

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 9) = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 9 = 0$

ويكون جذراها $\therefore \ \lambda = \neq 3i$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

٣- حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة

يمكن تعميم الحالات السابقة الخاصة بحل معادلات الرتبة الثانية على المعادلات من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots\dots\dots\dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

فتكون المعادلة المساعدة

$$a_0 \lambda^n + a1 \lambda^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

التى نحصل منها على الجذور $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots\dots\dots \lambda_n$

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور .

١) اذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq .... \neq \lambda_n$ (أعداداً حقيقية)

فان الحل العام

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}$$

٢) اذا كانت جميع الجذور حقيقية واحد الجذور مكرر K من المرات

$\lambda_{k+1} \neq ...... \neq \lambda_n$ ، $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 .... = \lambda_k$ فان الحل العام يكون

$$y = \left[c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_k x^{k-1}\right] e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + ... + c_n x^{\lambda_n x}$$

٣) اذا كانت الجذور $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$

فانه يوجد $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \alpha - i\beta$

ويكون الحل العام المناظر لتلك الجذور

$$y = e^{\alpha x} \left[(\left|c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) \cos \beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \beta x \right]$$

أمثلة عامة

<u>مثـــال</u> :

أوجد حل المسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ; y(0) = 4 \ , \ y'(0) = 8 \ , y''(0) = -4$$

<u>الحـــل</u> :

نضع المعادلة على الصورة $(D^3 + 2D^2 - 3D)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \;,\; 1 \;,\; -3 \qquad \therefore \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

ويكون الحل

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-3x} \qquad (1)$$

ولايجاد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد

$$y' = c_2 e^{x} - 3c_3 e^{-3x} \qquad (2)$$

$$y'' = c_1 e^{x} + 9c_2 e^{-3x} \qquad (3)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية فى المعادلات (1), (2), (3)

$y(0) = 4$ (1) $\Leftarrow$ $\therefore\; 4 = c_1 + c_2 + c_3 + \;.......(4)$

$y`(0) = 8$ (2) $\Leftarrow$ $8 = c_2 - 3c_3 \;......................(5)$

$y``(0) = -4 = -4$ (3) $\Leftarrow$ $c_2 + 9\,c_3 \;...........................(6)$

بحل المعادلات (4), (5), (6) ، $c_1 = 0 ,\;\; c_2 = 5 ,\;\; c_3 = -1$

و يكون الحل على الصورة $y = 5e^{x} - e^{-3x}$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' + 2y'' + y'' - 2y = 0$$

الحـــل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3+2D^2-D-2)\,y=0$$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=0$$

$$\lambda^2(\lambda+2)-(\lambda+2)=0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0 \qquad \Rightarrow \lambda=1\,,\ -1,\ -2$$

ويكون الحل العام

$$y=c_1\ e^x+c_2\ e^{-x}+c_3^{-2x}$$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D-2)^3(D+3)^2(D-4)y=0$$

الحـــل :

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة $(\lambda-2)^3(\lambda+3)^2(\lambda-4)=0$

$$\therefore\ \lambda=2,\ 2,\ 2,\ -3,\ -3,\ 4$$

ويكون الحل العام

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}+(c_4+c_5x)e^{-3x}+c_6e^{2x}$$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)\,y = 0$$

الحـــــل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda^2(\lambda - 1)^2 \qquad \Rightarrow \lambda = 0,\ 0,\ 1,\ 1$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)\,e^{x}.$$

مـــــثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

الذى يحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2, \qquad y''(0) = -6$$

الحـــــل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 - 6D^2 + 9D)\,y = 0$$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

$$\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-3)^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=0,\ 3,\ 3$$

ويكون الحل العام

$$y=c_1+(c_2+c_3x)e^{3x} \qquad (1)$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نوجد

$$y'=3(c_2+c_3x)\,e^{3x} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 9(c_2+c_3x)\,e^{3x}+3c_3\,e^{3x}+3c_3\,e^{3x} \\ &= 3\left[3(c_2+c_3x)e^{3x}+2c_3\,e^{3x}\right] \end{aligned} \qquad (3)$$

بالتعويض في (3) ,(2) ,(1) من الشروط الابتدائية .

$$y(0)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=c_1+c_2 \qquad (4)$$

$$y'(0)=2 \quad \Rightarrow \quad 2=3c_2+c_3 \qquad (5)$$

$$y''(0)=-6 \quad \Rightarrow \quad -6=3[3c_2+2c_3]$$

$$\Rightarrow \qquad -2=3c_2+2c_3 \qquad (6)$$

بحل (6) ,(5) ,(4) نجد أن

$$c_1=-2 \quad , c_2=2 \quad , c_3=-4$$

ويكون الحل الخاص الذى يحقق الشروط

$$y=2(1-2x)e^{3x}-2$$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)\, y = 0$$

الحـــل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

حيث ان المعادلة جبرية من الدرجة الثالثة ومن الصعب تحليل الطرف الايسر الى عوامل اقل من الدرجة الثالثة ، لذا نستخدم التخمين لحساب الجذور.

من نظرية المعادلات ، للمعادلة جذر حقيقى واحد على الاقل عبارة عن احد عوامل العدد 13 (الحد المطلق) .

نفرض $\lambda = 1$ $\quad \therefore L.H.S. = 1 - 3 + 9 + 13 \neq 0$

نفرض $\lambda = -1$ $\quad L.H.S. = -1 - 3 - 9 + 13 = 0 = R.H.S$

∴ $\lambda = -1$ أحد الجذور $\Leftarrow$ $\lambda + 1 = 0$ احد العوامل باستخدام القسمة على العامل $(\lambda + 1)$ نحصل على $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

∴ تصبح المعادلة المميزة $\quad (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

ويكون الحل العام $\quad y = c_1 e^{-x} + e^{2x}[c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x]$