٤- حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة :

نعلم أن المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \dots, \dots a_o \neq 0 \qquad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت ، $f(x)$ دالة متصلة فى نطاق تعريفها.

وباستخدام المؤثر D ، فإن الصورة الرمزية للمعادلة (1)

$$\Phi(D)\, y = f(x) \qquad (2)$$

حيث $\Phi(D)$ دالة كثيرة حدود من درجة n فى D ،

$$\Phi(D) = a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (2) نتبع الخطوات الآتية :

١) نوجد حل المعادلة المتجانسة المناظرة

$$\Phi(D) = y = 0$$

وذلك كما سبق دراسته ، ونرمز للحل الناتج بالرمز y_h ، أى أن y_h نحقق المعادلة المتجانسة فقط.

٢) نوجد حلاً خاصاً نرمز له بالرمز y_p ويحقق المعادلة (2) ، وسوف نعرض لطريقة ايجاد y_p

٣) نوجد الحل العام y_G حيث $y_G = y_h = y_p$ وبالطبع فإن y_G نحقق المعادلة (2).

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة $\quad \Phi(D)\, y = 0$

$\therefore \quad \Phi(D)\, y_h = 0$

y_p يحقق المعادلة $\quad \Phi(D)\, y = f(x)$

$\therefore \quad \Phi(D)\, y = f(x$

و لإثبات أن y_G يحقق المعادلة $\quad \Phi(D)\, y = f(x)$

$L.H.S \;= \Phi(D)\, y_G = \Phi(D)\, [y_h + y_p] = \Phi(D)\, y_h + \Phi(D)\, y_p = 0 + f(x) = f(x)$

$\quad = R.H.S$

طرق ايجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

المؤثر العكسي:

حيث ان y_P حل يحقق المعادلة $\Phi(D)\, y = f(x)$

$$\therefore \Phi(D)\, y_P = f(x)$$

باستخدام التأثير العكسى على الطرفين

$$\frac{1}{\phi(D)}\phi(D) y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

وسوف ندرس استخدام التأثير العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$ على الدالة $f(x)$ فى صور مختلفة .

١) اذا كان $f(x)=e^{\alpha x}$.

نعلم ان

$$\phi(D) e^{\alpha x} = \phi(\alpha) e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{\phi(D)} \phi(\alpha) e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(D)} \phi(D) e^{\alpha x}$$

$$\therefore \phi(\alpha) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

بالقسمة على $\phi(\alpha) \neq o$

أى لن $\quad \phi(\alpha) \neq 0 \quad , \quad \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} \quad , \quad \phi(\alpha) \neq 0$

٢) اذا كان $f(x)=e^{\alpha x}\, v(x)$

نعلم أن

$$D[e^{\alpha x} v(x)] = e^{\alpha x} D\, v(x) + \alpha e^{\alpha x} v(x)$$

$$= e^{\alpha x}(D+\alpha)\, v(x)$$

أيضاً

$$D^2[e^{\alpha x} v(x)] = D[e^{\alpha x}(D+\alpha)\, v(x)]$$

$$e^{\alpha x}[D^2 v(x) + \alpha D\, v(x)] + \alpha e^{\alpha x}(D+\alpha)\, v(x) =$$

$$= e^{\alpha x}[D+\alpha]^2\, v(x)$$

وهكذا نجد أن

$$D)[e^{\alpha x} v(x)] = e^{\alpha x} \phi(D+x)\, v(x) \quad \phi($$

ومن ذلك ، يمكن اثبات ان

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} v(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D+\alpha)} v(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\phi(D)$

$$L.H.S. = \phi(D) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} v(x) = e^{\alpha x} v(x)$$

$$R.H.S. = \phi(D)[e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D+x)} v(x)$$

$$= e^{\alpha x} \phi(D+\alpha) \frac{1}{\phi(D+\alpha)} v(x)$$

$$= e^{\alpha x} v(x)$$

٣) $$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)\,dx$$

الإثبات

$$\text{let} \quad \frac{1}{D} f(x) = z \quad \Rightarrow f(x) = Dz = \frac{dz}{dx}.$$

$$\therefore z = \int f(x)\,dx = \frac{1}{D} f(x) .$$

$\frac{1}{D}$ التاثير العكسى للمؤثر D ، اى $\frac{1}{D}$ يمثل التكامل بالنسبة الى x ، بينما $\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة إلى x عدد k من المرات .

٤) اذا كان $f(x)$ دالة كثيرة حدود من درجة n ، وكان $\phi(D)$ تاخذ احدى صور

$(1+D), (1-D), (1+D)^2, (1-D)^2, \ldots\ldots\ldots$

$$\therefore \frac{1}{1+D} f(x) = [1 - D + D^2 + \ldots\ldots + (-1)^n D^n]\, f(x)$$

$$\frac{1}{1-D} f(x) = [1 + D + D^2 + \ldots\ldots\ldots + D^n]\, f(x)$$

$$\frac{1}{(1-D)^2} f(x) = [1 + 2D + 3D^2 + \ldots + (n+1) D^n]\, f(x)$$

أو نتبع القسمة المطولة لإيجاد $1/\phi(D)$

٥- إذا كان $f(x) = c$ ، c مقدار ثابت .

$$\frac{1}{\Phi(D)}c = \frac{1}{\Phi(D)} c e^{ox} = c \frac{1}{\Phi(0)} e^{ox} = \frac{c}{\Phi(0)}; \qquad \Phi(0) \neq 0$$

فإذا كان

$1)\ \Phi(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5$

$\therefore \Phi(0) = 5$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{c}{\Phi(0)} = \frac{c}{5}$$

2) $\Phi(d) = D^3 - 2D^2 + 6D \quad \rightarrow \quad \Phi(0) = 0.$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 6D} c = \frac{1}{D} . \frac{1}{D^2 - 2D = 6} c = \frac{1}{D} \frac{c}{6} = \frac{c}{6} x$$

-٦
$$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

فإن

$$\frac{1}{\Phi(D^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \frac{1}{\Phi(-\alpha^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

نعلم أن

$$D \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$$

$$D^2 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^2 \sin(\alpha x + \beta)$$

$$D^3 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^3 \cos(\alpha^4 \sin(\alpha x + \beta)$$

$$D^4 \sin(\alpha x + \beta) = \alpha^4 \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^2 \sin(\alpha x + \beta)$$

ومن ذلك يمكن استنتاج

$$(D^2)^k \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \sin(\alpha x + \beta)$$

وبالمثل نثبت أن

$$(D^2)^k \cos(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \cos(\alpha x + \beta)$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore \Phi(D^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \Phi(-\alpha^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

بأخذ $f(x) = \sin(\alpha x + \beta)$

$$\therefore \Phi(D^2) \sin(\alpha x + \beta) = \Phi(-\alpha^2) \sin(\alpha x + \beta)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر العكسى $\frac{1}{\Phi(D^2)}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\Phi(-\alpha^2)\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

وحيث $\Phi(-\alpha^2)$ مقدار ثابت

$$\therefore \Phi(-\alpha^2)\frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

بالقسمة على $\Phi(-\alpha^2)\neq 0$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\frac{1}{\Phi(-\alpha^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

٧- من الحالة (1) إذا كان $\Phi(x)=0$

نضع $v(x)$ $e^{\alpha x}=e^{\alpha x}\,.\,1=e^{\alpha x}$

من (2)

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{\Phi(D)}(e^{\alpha x}.1)=e^{\alpha x}\frac{1}{\Phi(D)}\{1\}$$

٨- من الحالة (٦) إذا كان $\Phi(-\alpha^2)=0$

فى هذه الحالة نضع $\sin(\alpha x+\beta)=I\,e^{i(\alpha x+\beta)}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha\alpha+\beta)=I\frac{1}{\Phi(D)^2}e^{i(\alpha\alpha+\beta)}\,1)=I\,e^{i(\alpha\alpha+\beta)}\frac{1}{\Phi(D+i\alpha)^2)}$$

٤- أمثـلة متنوعة :

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2\ 2D = 3)\ y = 42\ e^{4x}$$

الحـــل :

أولا : نوجد حل $(D^2 + 2D - 3)\ y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

$\therefore$ المعادلة المميزة $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$$\therefore (\lambda - 1)\ (\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -3$$

$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانيا : نوجد حلاً خاصاً y_p ،

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3} 42e^{4x} = 42 \frac{1}{(D-1)(D+3)} e^{4x} = 42 \frac{1}{(3)(7)} e^{4x} = 2e^{4x}$$

ثالثا : الحل العام $y_g = y_4 = y_p$

حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان.

مثـــال :

أوجدى حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$(D + 4D + 3)y = 8\,xe^{x} - 6\,, \qquad y(0) = \frac{-11}{4}, \qquad y'(0) = \frac{1}{4}$$

الحــــل :

أولا : نوجد حل المعادلة المتجانسة

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة وتكون المعادلة المميزة هى :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\therefore (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1 , -3$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانيا : نوجد حلاً خاصاً y_p

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 3}[8xe^x - 6] = \frac{1}{(D+1)(D+3)}[8xe^x - 6]$$

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 8x e^x = 8 e^x \frac{1}{(D+2)(D+4)} x$$

$$= \frac{8}{(2)(4)} e^x \frac{1}{(1+\frac{D}{2})(1+\frac{D}{4})} x = e^x (1 - \frac{D}{2})(1 - \frac{D}{4}) x$$

$$= e^x (1 - \frac{D}{2})(x - \frac{1}{4}) = e^x [x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4} e^x (4x - 3)$$

وكذلك :

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 6 = \frac{6}{3} = 2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{4} e^x (4x - 3) + 2$$

ثالثا : نوجد الحل العام

$y_G = y_h + y_p$

$$\therefore y = y_G = y c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x} (4x-3) + 2 \qquad (1)$$

ولايجاد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد :

$$y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x} [4 + 4x - 3]$$

$$\therefore y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x} (4x + 1) \qquad (2)$$

من (1) ، (2) والشروط الابتدائية

$$y(0) = \frac{-11}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{11}{4} c_1 + c_2 - \frac{3}{4} - 2 \qquad (3)$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} = -c1 - 3c_2 + \frac{1}{4} \qquad (4)$$

بجمع (3) ، (4)

$$\therefore \frac{-10}{4} = -2c_2 - \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 2c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

بالتعويض فى (3)

$$c_1 = -\frac{11}{4} + \frac{11}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

∴ الحل المطلوب

$$y = \frac{1}{4} e^{x} (4x-3) - 2$$

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - D^2) y = 2 \cos x$$

الحـــل :

أولا : نوجد حل $(D^3 - D^2)\, y = 0$

نجد أن

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{+x}$$

ثانيا : نوجد y_p ، حيث

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2} 2\cos x = 2\frac{1}{-D+1}\cos x$$

بالضرب فى المرافق $1 + D$

$$\therefore y_p = 2\frac{1+D}{1-D^2}\cos x = 2\frac{1+D}{1+1}\cos x = (1+D)\cos x = \cos x - \sin x$$

ثالثا : الحل العام $y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} + \cos x - \sin x$

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - D + 5)y = \sin 2x$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - D + 5)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda + 5 = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = e^{\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x)$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$y_p = \frac{1}{D^2 - D + 5}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{-(2)^2 - D + 5}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{1 - D}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1 + D}{(1 + D)(1 - D)}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1 + D}{(1 - D^2)}\{\sin 2x\} = \frac{1 + D}{5}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

أى أن

$$y_p = \frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = e^{\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x) + \frac{1}{5}(\sin 2x + \cos 2x)$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

وفى المثال التالى سنناقش الحل عندما يكون $\phi(-\alpha^2)=0$.

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^2+4)y=\sin 2x$

<u>الحـــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2+4)y=0$$

بافتراض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2+4=0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_{1,2}=\pm 2i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H=A\cos 2x+B\sin 2x$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$y_p=\frac{1}{D^2+4}\{\sin 2x\}$$

واضح أن $\phi(-m^2)=\phi(-4)=0$ في هذه الحالة فإننا نستخدم الطريقة التالية :

من نظرية دى موافر نجد أن : $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

أى أن

$$\text{الجزء الحقيقي} = \cos x = \mathrm{Re}.(e^{ix})$$

$$\text{الجزء التخيلي} = \sin x = \mathrm{Im}.(e^{ix})$$

وعلى هذا فإن

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\mathrm{Im}.\{e^{2ix}\}$$

$$= \mathrm{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{(D+2i)^2+4}\{1\}$$

$$y_p = \mathrm{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{D^2+4iD-4+4}\{1\}$$

$$= \mathrm{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{D^2+4iD}\{1\}$$

$$= \mathrm{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{4iD}(1+\frac{D}{4i})^{-1}\{1\}$$

$$= \mathrm{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{4iD}(1-\frac{D}{4i}+\ldots)\{1\}$$

$$= \mathrm{Im}.e^{2ix}.(\frac{1}{4iD}+\frac{1}{16}+\ldots)\{1\}$$

$$= \mathrm{Im}.e^{2ix}.(\frac{x}{4i}+\frac{1}{16})$$

$$= \mathrm{Im}.(\cos 2x + i\sin 2x).(-\frac{x}{4}i+\frac{1}{16})$$

ومنها

$$y_p = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x.$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

من هذا المثال يمكن اثبات أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2+4)y=\cos 2x$$

هو

$$y=A\cos 2x+B\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{x}{4}\sin 2x.$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

٩- إذا كانت $F(x)$ على الصورة $:F(x)=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}$

في هذه الحالة فإننا نستخدم الحالة (٦) حيث :

$$\frac{1}{\phi(D^2)}=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}=\frac{1}{\phi(m^2)}=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}$$

بشرط أن $\phi(m^2)\neq 0$.

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4-8D^2-9)y=50\sinh 2x$$

الحــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4 - 8D^2 - 9)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^4 - 8\lambda^2 - 9 = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda^2 + 1) = 0$$

ومنها الجذور هى

$$\lambda = 3, \quad \lambda = -3 \ , \ \lambda = \pm i$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D^4 - 8D^2 - 9}\{50 \sinh 2x\}$$

$$= \frac{50 \sinh 2x}{16 - 32 - 9} = \frac{50 \sinh 2x}{-25}$$

ومنها

$$y_p = -2 \sinh 2x.$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - 2 \sinh 2x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4-1)y=10\cos x.\cosh x$$

الحــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4-1)y=0$$

بافتراض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي .

$$\lambda^4-1=0$$

بالتحليل نجد أن

$$(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0$$

ومنها الجذور هى

$$\lambda=1,\quad \lambda=-1\ ,\ \lambda=\pm i$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned}
y_p&=\frac{1}{D^4-1}\{10\cos x.\cosh x\}\\
&=\text{Re}.\frac{10}{(D^2-1)(D^2+1)}\{e^{ix}.\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\}\\
&=5.\text{Re}.\frac{1}{(D^2-1)(D^2+1)}\{e^{(1+i)x}+e^{(i-1)x}\}
\end{aligned}$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{(1+i)x}}{((1+i)^2-1)((1+i)^2+1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{((i-1)^2-1)((i-1)^2+1)}]$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{(1+i)x}}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{(-2i-1)(-2i+1)}]$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{x}e^{ix}}{-5} + \frac{e^{-x}e^{ix}}{-5}]$$

$$= -\text{Re}.(e^x + e^{-x})e^{ix}$$

$$= -\text{Re}.2\cosh x(\cos x + i\sin x)$$

$$= -2\cosh x.\cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x - 2\cosh x.\cos x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-1)^2(D+1)y = -2e^x$$

<u>الحـــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-1)^2(D+1)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ مكرر مرتين

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)}\{-2e^x\}$$

$$= \frac{-2}{(D-1)^2(1+1)}\{e^x\}$$

$$= \frac{-2e^x}{2(D+1-1)^2}\{1\}$$

$$= -e^x \frac{1}{D^2}\{1\} = -\frac{1}{2}x^2 e^x$$

ومنها

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 e^x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^x - \frac{1}{2}x^2 e^x.$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-2)y = 3e^x(x+1)$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-2)y=0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda-2=0$$

ومنها $\lambda=2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{2x}$$

حيث c_1 ثابت اختيارى .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D-2}\{3e^x(x+1)\} \\
&= 3e^x\frac{1}{D+1-2}\{x+1\} \\
&= -3e^x\frac{1}{1-D}\{x+1\} \\
&= -3e^x(1-D)^{-1}\{x+1\} \\
&= -3e^x(1+D+\ldots)\{x+1\} \\
&= -3e^x(x+1+1)
\end{aligned}$$

ومنها

$$y_p=-3(x+2)e^x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1e^{2x}-3(x+2)e^x.$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$D^2(D^2+4)y = 96x^2$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$D^2(D^2+4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2(\lambda^2+4) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = 0,0 \quad , \quad \lambda = \pm 2i$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D^2(D^2+4)}\{96x^2\}$$

$$= \frac{96}{4}\frac{1}{D^2}(1+\frac{D^2}{4})^{-1}\{x^2\}$$

$$= 24\frac{1}{D^2}(1-\frac{D^2}{4}+\frac{D^4}{16}-\dots)\{x^2\}$$

$$= 24(\frac{1}{D^2}-\frac{1}{4}+\frac{D^2}{16}-\dots)\{x^2\}$$

$$= 24\,(\frac{x^4}{12}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8})$$

ومنها

$$y_p = 2x^4 - 6x^2 + 3$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 2x^4 - 6x^2 + 3$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 50(e^x + \cos 3x)$$

الحــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

بالتحليل نجد أن $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$

وتكون الجذور هي $\lambda = 1 \quad , \quad \lambda = \pm 2i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$y_p = \frac{50}{D^3 - D^2 + 4D - 4}\{e^x + \cos 3x\}$$

$$= \frac{50\, e^x}{(D+1)^3 - (D+1)^2 + 4(D+1) - 4}\{1\} + \frac{50}{D^3 + 9 + 4D - 4}\{\cos 3x\}$$

$$= \frac{50\, e^x}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - D^2 - 2D - 1 + 4D + 4 - 4}\{1\}$$

$$+ 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{D^3 + 4D + 5}\{e^{3ix}\}$$

$$= \frac{50 e^x}{D^3 + 2D^2 + 5D}\{1\} + 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{(3i)^3 + 4(3i) + 5}e^{3ix}$$

$$= \frac{50 e^x}{5D}(1 + \frac{D^2 + 2D}{5})^{-1}\{1\} + 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{-27i + 12i + 5}e^{3ix}$$

$$= 10 e^x(\frac{1}{D} - \frac{2}{5} + \ldots)\{1\} + 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{5 - 15i}e^{3ix}$$

$$= 10 e^x(x - \frac{2}{5}) + 10\,\mathrm{Re}.\frac{1}{1-3i}.\frac{1+3i}{1+3i}\; e^{3ix}$$

$$= 10 e^x(x - \frac{2}{5}) + \frac{10}{10}\mathrm{Re}.(1+3i)(\cos 3x + i \sin 3x)$$

ومنها

$$y_p = 10\; e^x(x - \frac{2}{5}) + \cos 3x - 3 \sin 3x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + 10 e^x(x - \frac{2}{5}) + \cos 3x - 3 \sin 3x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2-5D+6)y=100\sin 4x.$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2-5D+6)y=0.$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda=3$, $\lambda=2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2-5D+6}\{100\sin 4x\} \\ &= \frac{100}{-16-5D+6}\{\sin 4x\} \\ &= -20\ \mathrm{Im}.\frac{1}{D+2}\{e^{4ix}\} \\ &= -20\ \mathrm{Im}.\frac{e^{4ix}}{D+4i+2}\{1\} \end{aligned}$$

$$= -20 \text{ Im}.\frac{e^{4ix}}{4i+2}(1+\frac{D}{4i+2})^{-1}\{1\}$$

$$= -20 \text{ Im}.\frac{e^{4ix}}{4i+2}(1+\ldots\ldots)\{1\}$$

$$= -20 \text{ Im}.\frac{e^{4ix}}{2+4i}.\frac{2-4i}{2-4i}.1$$

$$= -20 \text{ Im}.\frac{(\cos 4x + i\sin 4x)(2-4i)}{20}$$

ومنها

$$y_p = 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

يمكن إيجاد الحل الخاص بطريقة أخرى

$$y_p = -20\frac{1}{D+2}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{1}{D+2}.\frac{D-2}{D-2}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{D-2}{D^2-4}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{D-2}{-16-4}\{\sin 4x\}$$

$$= (D-2)\{\sin 4x\}$$

$$y_p = 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D+1)y = x\sin x.$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D+1)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda + 1 = 0$$

ومنها $\lambda = -1$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D+1}\{x\sin x\} \\ &= \text{Im}.\frac{1}{D+1}\{x\,e^{ix}\} \\ &= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{D+i+1}\{x\} \end{aligned}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{i+1}\left(1+\frac{D}{i+1}\right)^{-1}\{x\}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\left(1-\frac{D}{1+i}+\ldots\ldots\right)\{x\}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}(1-i)}{2}\left(x-\frac{1}{1+i}\right)$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{2}.\left(x(1-i)-\frac{1-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}\right)$$

$$= \text{Im}.\frac{(\cos x + i\sin x)}{2}(x(1-i)+i)$$

ومنها

$$y_p = \frac{x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + \frac{x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\cos x$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

<u>**مثـــــال :**</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + m^2)y = a\cos mx + b\sin mx.$$

حيث a,b ثوابت .

<u>**الحـــــل :**</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 + m^2)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2+m^2=0$$

ومنها تكون الجذور هى $\lambda=\pm mi$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1\cos mx+c_2\sin mx.$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p=\frac{1}{D^2-m^2}\{a\cos mx+b\sin mx\}$$

$$=\frac{a}{D^2+m^2}\{\cos mx\}+\frac{b}{D^2+m^2}\{\sin mx\}$$

$$=a\,\mathrm{Re}.\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}+b\,\mathrm{Im}.\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}$$

نعتبر الآتى

$$\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}=e^{imx}\ .\frac{1}{(D+im)^2+m^2}\{1\}$$

$$=e^{imx}\ .\frac{1}{D^2+2imD}\{1\}$$

$$=\frac{e^{imx}}{2imD}(1+\frac{D}{2im})^{-1}\{1\}$$

$$=\frac{e^{imx}}{2im}(\frac{1}{D}-\frac{1}{2im}+\ldots\ldots)\{1\}$$

$$=-i\frac{e^{imx}}{2m}(x+\frac{i}{2m})$$

$$=\frac{-1}{2m}(\cos mx+i\sin mx)(ix-\frac{1}{2m})$$

من هذا نستنتج أن

$$\text{Re}.(\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}) = \frac{1}{2m}(\frac{\cos mx}{2m} + x\sin mx),$$

$$\text{Im}.(\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}) = \frac{-1}{2m}(x\cos mx - \frac{\sin mx}{2m}).$$

من هذا يكون

$$y_p = \frac{a}{2m}(\frac{\cos mx}{2m} + x\sin mx) - \frac{b}{2m}(x\cos mx - \frac{\sin mx}{2m}).$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1\cos mx + c_2\sin mx + \frac{a}{2m}(\frac{\cos mx}{2m} + x\sin mx)$$
$$- \frac{b}{2m}(x\cos mx - \frac{\sin mx}{2m}).$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

تمـاريـــن

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $y'' - 14y' - 48y = 0$
2. $y'' - 12y' + 27y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$
4. $y'' + y' - 2y = 0$
5. $y'' + 2y' + 5y = 0$
6. $y'' + 12y' + 36y = 0$
7. $y'' + 3y' + 4y = 0$
8. $y'' - 2y' + 4y = 0$
9. $y'' + 2y' = 0$
10. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
11. $y'' + 4y' + 13y = 0$
12. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
13. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$
14. $4y^{(5)} - 3y''' - y'' = 0$
15. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$
16. $4y^{(4)} - 23y'' - y' = 0$
17. $y'' - 10y' + 16y = 6$
18. $y'' - 5y' + 6y = 7$
19. $y'' + 4y' + 5y = 10$
20. $y'' + 4y' + 5y = x + 2$
21. $y'' - 5y' + 6y = 3x$
22. $y'' - y' + y = x^3$
23. $y'' + 4y' + 3y = x$
24. $y'' - y = x^2 + 2$
25. $3y'' + y' - 14y = 2e^x$
26. $y'' - 5y' + 6y = 7e^{4x}$
27. $y'' - y = e^x$
28. $y'' + y' + y = e^{3x} + 5$
29. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$
30. $(y'' - 2y)^2 = e^x + xe^{2x}$
31. $(y'' - 2y)^2 = x^2e^{2x}$
32. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{1}{x^2}e^{3x}$

33. $y' - y = (x+3)e^{2x}$

34. $y'' + 9y = (x^2+1)e^{3x}$

35. $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^{x}$

36. $y'' - 6y' + 10y = x^3 e^{3x}$

37. $y'' - 5y' + 6y = 9\sin 2x$

38. $y'' - 5y' + 6y = 9\cos 2x$

39. $y'' - 4y = \sin 6x$

40. $y'' + 2y' + y = 3\cos 4x$

41. $y'' - 2y' + y = xe^{x}\sin x$

42. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$

43. $y'' + 4y = \cos 2x$

44. $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$

45. $y'' - 2y' - y = e^{x}\cos x$

46. $y^{(4)} - y = \sin 2x$

47. $y'' - 4y = x^2 e^{3x}$

48. $y'' + 3y' + 2y = x\sin 2x$

49. $y'' + 9y = 4\sin 3x$

50. $y'' - y = x^2 \sin 3x$

51. $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

52. $y'' + 4y = 4\tan 2x$

53. $y'' + y = \sec x$

54. $y'' - y' - 2y = 10\cos x$

55. $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$

56. $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} + xe^{2x}$

57. $y'' + y = 3\cos 2x + 2\sin 3x$

58. $y'' + 3y' - 4y = \sin 2x$

59. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = (e^{2x}+3)^2$

60. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$

61. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2$

62. $y'' + 5y = \sin x + 2\sin 2x$

63. $y'' - 9y = 3 - 9x^2 + 27x^4$

64. $y'' + 6y' + 5y = 104e^{3x}$

65. $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$

66. $y'' - 5y' + 6y = 25\sin 4x$

67. $y'' - 10y' + 25y = x^5 e^{5x}$

68. $y'' + 2y' = 24x$

69. $4y'' + 8y' + 3y = e^{-x}(x^2 + \sin\frac{x}{2})$

70. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$

71. $y'' - y' + 5y = \sinh 2x$

72. $y^{(4)} - 8y'' + 9y = 50\sinh 2x$

73. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 50(e^x + \cos 3x)$

74. $y^{(5)} - y' = 12e^x + 8e^{-2x}\sinh x$

75. $y^{(4)} - 6y'' - 8y' - 3y = 256(x+1)e^{3x}$

76. $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$

77. $y^{(4)} - y = 10\cos x \cosh x$

78. $y'' - y' + 3y = e^{2x}$

79. $y'' - 8y' + 15y = 30$

80. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

81. $y'' - 3y' + 2y = x^2$

82. $2y'' - y' - y = xe^x$

83. $y'' - y' + 5y = \sin 2x$

84. $y'' + 9y = \sin 3x$

85. $y'' + 4y' + 3y = x$

86. $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

87. $y'' - 10y' + 9y = (x-2)e^x$

88. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 2x + 1$

89. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$

90. $y'' - y' + 5y = \sinh 2x$