الباب الثامن

طريقة تغيير البارامترات (الوسائط - الثوابت)

Variation of Parameters

١- مقدمة

تستخدم هذه الطريقة بصفة عامة لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية وذلك بمعلومية حل المعادلة المتجانسة y_H حيث أننا نعتبر الثوابت الاختيارية دوال فى المتغير x .

والآن سوف نشرح هذه الطريقة على معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مع ملاحظة أنه يمكن تطبيقها على المعادلات التفاضلية ذات الرتب الأعلى .

لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة .

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان و $f(x)$ دالة فى المتغير المستقل x.

وتكون المعادلة المتجانسة هى

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

بافتراض أن حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$y_h = Ay_1 + By_2$$

حيث كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) .

والآن لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية (1) فإننا نعتبر أن كل من A, B دوال في المتغير x ويكون الحل الخاص على الصورة

$$y_p = A(x)y_1 + B(x)y_2 \qquad (3)$$

بتفاضل (3) بالنسبة إلى x نحصل على

$$y_p' = Ay_1' + A'y_1 + By_2' + B'y_2$$

نختار كل من A, B بحيث أن

$$A'y_1 + B'y_2 = 0 \qquad (4)$$

ومنها يكون

$$y_p' = Ay_1' + By_2'$$

وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y_p'' = Ay_1'' + A'y_1' + By_2'' + B'y_2'$$

وبالتعويض عن كل من y_p'', y_p', y_p فى المعادلة التفاضلية (1) نحصل على

$$Ay_1'' + A'y_1' + By_2'' + B'y_2' + a_1(Ay_1' + By_2') + a_2(Ay_1 + By_2) = f(x)$$

ومنها

$$A(y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1)A'y_1' + B(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + A'y_1' + B'y_2' = f(x)$$

وحيث أن كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) فإن

$$y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1 = 0 \,,$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$$

بذلك يكون

$$A'y_1' + B'y_2' = f(x) \qquad (5)$$

وبحل المعادلتين (4) و (5) فى الدالتين A, B فأننا نحصل على كل منهما وبمعرفتهما نكون قد حللنا على الحل الخاص (3) وبذلك يمكن إيجاد الحل العام

$y_G = y_h + y_p$ للمعادلة التفاضلية (1) . مع ملاحظة أن هذه الطريقة تستخدم بصفة خاصة إذا كانت الدالة $f(x)$ على إحدى الصور

$$\frac{e^x}{x}, \sec x, \cot x, \tan x, \ln x, \sin^{-1} x, \ldots\ldots$$

والآن سنقوم بتطبيق هذه الطريقة فى الأمثلة الآتية .

٢- أمثلة محلولة :

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هى

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

حيث $D = \frac{d}{dx}$.

نفترض أن حل هذه المعادلة على الصورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعــويض نجــد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذرى المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 3 \quad , \lambda_2 = 3$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^{3x} + B(x)xe^{3x}$$

حيث $A(x),\ B(x)$ دالتين في x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y_p' = 3Ae^{3x} + A'e^{3x} + B'xe^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

نختار A, B بحيث أن

$$A'e^{3x} + B'xe^{3x} = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون

$$y_p' = 3Ae^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y_p'' = 9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$

بالتعويض عن كل من $y_p'',\ y_p',\ y_p$ في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$
$$- 18Ae^{3x} - 6Be^{3x} - 18Bxe^{3x} + 9Ae^{3x} + 9Bxe^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

ومنها نجد أن

$$3A'e^{3x} + B'(1 + 3x)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

أى أن

$$3A' + B'(1+3x) = \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$A' = -\frac{1}{x} \quad , \qquad B' = \frac{1}{x^2}$$

وبالتكامل نجد أن

$$A = -\ln x \quad , \qquad B = -\frac{1}{x}$$

بذلك يكون

$$y_p = -e^{3x} \ln x - \frac{1}{x} x e^{3x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} - e^{3x} \ln x - \frac{1}{x} x e^{3x}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y = \frac{2}{1+e^x}$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$y'' - y = 0$$

بافتراض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذرى المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = -1$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^x + Be^{-x}$$

بافتراض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^x + B(x)e^{-x}$$

حيث $A(x), B(x)$ دالتين فى x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y'_p = Ae^x + A'e^x - Be^{-x} + B'e^{-x}$$

نختار A, B بحيث أن

$$A'e^x + B'e^{-x} = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون

$$y'_p = Ae^x - Be^{-x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x}$$

بالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x} - Ae^x - Be^{-x} = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها نجد أن

$$A'e^x - B'e^{-x} = \frac{2}{1+e^x} \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$2A'e^x = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها وبفصل المتغيرات نجد أن

$$dA = \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dA = \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dx}{e^x} - \int \frac{dx}{1+e^x}$$
$$= -e^{-x} - \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}$$

ومنها

$$A = -e^{-x} + \ln\,(1+e^{-x})$$

وبطرح (2) من (1) نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int dB = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

ومنها

$$B = -\ln\,(1+e^x)$$

بذلك يكون

$$y_p = e^x\left(-e^{-x} + \ln\,(1+e^{-x})\right) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$
$$= -1 + e^x\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = Ae^x + Be^{-x} - 1 + e^x\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + y = \tan x$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هى $y'' + y = 0$

نفترض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

وبالتحليل تكون الجذور هى $\lambda = \pm i$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h = A\cos x + B\sin x$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة $y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x$

حيث $A(x), B(x)$ دوال فى x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x $y'_p = A'\cos x - A\sin x + B'\sin x + B\cos x$

نختار A, B بحيث أن

$$A'\cos x + B'\sin x = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون $y'_p = -A\sin x + B\cos x$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = -A\cos x - A'\sin x - B\sin x + B'\cos x$$

بالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$-A\cos x - A'\sin x - B\sin x + B'\cos x + A\cos x + B\sin x = \tan x$$

ومنها نجد أن

$$-A'\sin x + B'\cos x = \tan x \qquad (2)$$

بضرب المعادلة (1) فى $\sin x$ و المعادلة (2) فى $\cos x$ وبجمع المعادلتين الناتجتين نجد أن

$$B'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \tan x \, . \, \cos x$$

ومنها

$$B' = \sin x \qquad (3)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$B = -\cos x$$

وبالتعويض من (3) فى (1) نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$A' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

ومنها

$$dA = -\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

وبالتكامل

$$\int dA = -\int(\sec x - \cos x)\ dx$$
$$= -\int \sec x\, dx + \int \cos x\ dx$$

$$A = -\ln(\sec x + \tan x) + \sin x$$

بذلك يكون الحل الخاص

$$y_p = [-\ln(\sec x + \tan x) + \sin x]\cos x - \cos x \,.\, \sin x$$
$$= [-\ln(\sec x + \tan x)]\cos x$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A\cos x + B\sin x - [\ln(\sec x + \tan x)]\cos x$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

تمارين

(١) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية باستخدام طريقة تغيير الوسائط (البارامترات)

(1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

(2) $y'' - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}$

(3) $y'' + 4y = 2\tan x$

(4) $y'' + y = \sec x$

(5) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

(6) $y'' + y = \cot x$

(7) $y'' - y = e^x / 1 + e^x$

(8) $y'' + y = \tan^{-1} x$

(٢) باستخدام طريقة تغيير البارامترات اثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + \omega^2 y = f(x)$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int \sin(\omega(x-t)) . f(t)\, dt$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

(٣) أوجد الحل العام باستخدام طريقة تغيير البارامترات إذا علم حلان أو $x2$ للمعادلـــة المتجانسة المصاحبة .

i. $x^2 y'' - xy' + y = x^3 \; e^x$

ii. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t / t^3$

iii. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = e^t / 1 + e^t$

iv. $\dfrac{d^3 z}{d\theta^3} - 3\dfrac{d^2 z}{d\theta^2} + 2\dfrac{dz}{d\theta} = e^{3\theta} / 1 + e^{\theta}$