# الباب العاشر

# تحويل لابلاس واستخدامه فى حل المعادلات التفاضلية العادية

# *Laplace Transform*

يستخدم بتحويل لابلاس فى حل بعض المعادلات التفاضلية العادية وكذلك بعض المعادلات التفاضلية الجزئية والتكاملية .

## ١- **تعريف** : ( تحويل لابلاس)

يسمى التكامل $\qquad (1) \qquad \bar{f}(p)=\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-px}\;dx \quad , \quad p>0$

بتحويل لابلاس ويرمز له بالرمز $L\{\;\}$ و فى هذه الحالة يمكن كتابة $(1)$ على الصورة :

$$L\{f(x)\}=\bar{f}(p)=\int_0^\infty f(x)\,.\,e^{-px}\;dx \quad , \quad p>0 \qquad (2)$$

## ٢- **خواص المؤثر** $L\{\;\}$ :

نفترض ان $\alpha$ و $\beta$ ثابتين وأن كل من $f(x)$ و $g(x)$ دالة فى المتغير $x$ و أن $L\{\;\}$ هو مؤثر لابلاس ، فإن :

$$1-L\{\alpha\; f(x)\}=\alpha\; L\{f(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة $(1)$ نجد أن :

$$L\{\alpha\ f(x)\} = \int_0^\infty \alpha\ f(x).\ e^{-px}\ dx$$

$$=\alpha \int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\ dx$$

$$=\alpha\ L\{f(x)\}$$

$$2-L\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}=\alpha L=\{f(x)\}+\beta L\{g(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة *(1)* وحيث أن كل من $\alpha$ و $\beta$ ثابتين فإن :

$$L\{\alpha\ f(x)+\beta g(x)\} = \int_0^\infty \alpha\ f(x)+\beta g(x).\ e^{-px}\ dx$$

$$= \int_0^\infty \alpha f(x)\ .\ e^{-px}\ dx+\int_0^\infty \beta g(x).e^{-px}\ dx$$

$$=\alpha \int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\ dx+\int_0^\infty \beta g(x).e^{-px}\ dx$$

$$=\alpha\ L\{f(x)\}+\beta L\{g(x)\}$$

مما سبق نستنتج أن المؤثر $L\{\ \}$ مؤثر تكاملى خطى .

**<u>تعريف</u>** : ( تحويل لابلاس العكسى)

اذا كان $L\{f(x)\}=f(p)$ فإن $f(x)=L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$

ويسمى $L^{-1}\{\ \}$ بمؤثر لابلاس العكسى للمؤثر $L\{\ \}$ . وهذا المؤثر له الخواص الآتية :

$1-L\{L^{-1}\{\bar{f}(p)\}\}=\bar{f}(p),$

$2-L^{-1}\{L(f(p)\}\}=f(p),$

$3-L^{-1}\{a\bar{f}(p)\}=\alpha L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$

ويمكن إيجاد تحويل لابلاس لكل دالة تحقق الشرط :

$$|f(x)| < M e^{\alpha x}$$

حيث $\alpha$ و $M$ عددان حقيقيان موجبان .

تسمى الــدوال التى تحقق الشرط السابق دوال لها درجــة أسية $\alpha$ وهى الــدوال التى على الصورة $x^k, \ \sin kx, \ \cos kx, \ \ldots\ldots\ldots$

والآن سنوجد تحويلات لابلاس لبعض الدوال .

(١) اذا كان $f(x) = 1$

فإن

$$L\{1\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\,dx = \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}$$

اى أن

$$L\{1\} = \frac{1}{p} \qquad (3)$$

(٢) اذا كان $f(x) = x^n \ ; \ n \geq 1$ :

فإن

$$L\{x^n\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty x^n e^{-px}\,dx$$

وبوضع $px = u$ فإن

$$L\{x^n\} = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} \ ; \ n = 1,2,3,\ldots\ldots \qquad (4)$$

(٣) إذا كان $f(x) = e^{ax}$ حيث $a$ ثابت حقيقي :

فإن

$$L\{e^{ax}\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{ax} e^{-px} \, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-a)x} \, dx$$

$$L\{e^{ax}\} = \left[ \frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)} \right]_0^\infty = \frac{1}{p-a}$$

وبالتالي فإن

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} \;\; ; \;\; p > a \tag{5}$$

(٤) إذا كان $f(x) = \sin ax$ حيث $a$ ثابت حقيقي :

فإن

$$L\{\sin ax\} = \bar{f}\,(p) = \int_0^\infty \sin axe^{-px} \, dx$$

$$= \frac{a}{p^2 + a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\,\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2 + a^2} \tag{6}$$

(٥) إذا كان $f(x) = \cos ax$ حيث $a$ ثابت حقيقي:

فإن

$$L\{\cos ax\} = \bar{f}\,(p) = \int_0^\infty \cos ax \,.\, e^{-px} \, dx$$

$$= \frac{p}{p^2 + a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{\cos ax\}=\frac{p}{p^2+a^2} \tag{7}$$

(٦) إذا كان $f(x)=\sinh ax$ حيث $a$ ثابت حقيقي :

فإن

$$L\{\sinh ax\}=\bar{f}(p)=\int_0^\infty \sinh ax . e^{-px}\, dx$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

أي أن :

$$L\{\sinh ax\}=\frac{a}{p^2-a^2} \tag{8}$$

ذلك لأن :

$$\int_0^\infty \sinh ax . e^{-px}\, dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{ax}-e^{-ax}\right).e^{-px}\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(p-a)x}-e^{-(p+a)x}\right) dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)}-\frac{e^{-(p+a)x}}{-(p+a)}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]=\frac{1}{2}\,\frac{p+a-p+a}{p^2-a^2}$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

وبطريقة أخرى :

$$L\{\sinh ax\}=L\left\{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[L\{e^{ax}\}-L\{e^{-ax}\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

(٧) إذا كان $f(x)=\cosh ax$ حيث $a$ ثابت حقيقى :

فإن :

$$L\{\cosh ax\}=\frac{p}{p^2-a^2} \qquad (9)$$

وذلك لان

$$L\{\cosh ax\}=L\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[L\{e^{ax}\}\ L\{e^{-ax}\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p+a-p+a}{p^2-a^2}$$

$$=\frac{p}{p^2-a^2}$$

ويمكن تلخيص هذه النتائج فى الجدول التالى :

| *S. No.* | *f (x)* | *L f (p)* |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $1/p,\ p>0$ |
| 2 | $x^n$ (n is a + v θ integer) | $n!/p^{n+1},\ p>0$ |
| 3 | $x^n,\ n>-1$ | $\Gamma(n+1)/p^{n+1},\ p>0$ |
| 4 | $x^{ax}$ | $1/(p-a),\ p>0$ |
| 5 | $\sin^{-ax}$ | $a/(p^2+a^2),\ p>0$ |
| 6 | $\cos ax$ | $p/(p^2+a^2),\ p>0$ |
| 7 | $\sinh ax$ | $a/(p^2-a^2),\ p>\lvert a\rvert$ |
| 8 | $\cosh ax$ | $p/p^2-a^2),\ p>\lvert a\rvert$ |

## نظرية (١) :

إذا كانت $L\{f(x) = \bar{f}(p)$ فإن $L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{f}(p+a)$

## البرهان :

من تعريف مؤثر لابلاس نجد ان :

$$L\left\{e^{-ax} f(x)\right\} = \int_0^\infty \cdot e^{-ax} f(x).e^{-px}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \cdot e^{-(a+P)x} f(x).\, dx = f(p+a)$$

---

**<u>مثـــال :</u>**

أثبت أن $L\{x^n e^{-ax}\} = \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}; n = 1,2,3,......$

## الحــــل:

من تعريف تحويل لابلاس نجد أن

$$L\left\{x^n e^{-ax}\right\} = \int_0^\infty x^n\, e^{-ax}\, .e^{-px}\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^n\, e^{-(a+P)}.\, dx = \bar{f}(p+a)$$

ولدينا :

$$L\left\{x^n\right\} = \bar{f}(x) = \frac{n!}{p^{n+1}}\ ;\ n=1,2,3,\ ........$$

وعلى ذلك فإن

$$L\left\{x^n e^{-ax}\right\} = \bar{f}(p+a) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}\ ;\quad n=1,2,3,.......$$

**نظرية (٢):**

إذا كانت $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$

فإن $L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \bar{f}(p); = 1, 2, 3 \ldots$

## البرهان

حيث أن $\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$

بالإشتقاق بالنسبة إلى $p$ ومع خواص التفاضل والتكامل ، فإننا نحصل على

$$\frac{d}{dp}\bar{f}(p) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}(e^{-px}) f(x)dx$$

$$= -\int_0^\infty x e^{-px} f(x)dx$$

$$= -L\{xf(x)\}$$

بتكرار هذا الاشتقاق مرة أخرى نجد أن

$$\frac{d^2}{dp^2}\bar{f}(p) = (-1)^2 L\{x^2 L\{x^2 f(x)\}.$$

بتكرار هذا الاشتقاق بالنسبة إلى $p$ عدد $(n\text{-}2)$ من المرات نحصل على العلاقة :

$$\frac{d^n}{dp^n}\bar{f}(p) = (-1)^n L\{x^n f(x)\} \quad ; \quad n = 1, 2, 3$$

---

<u>**مثـــال :**</u>

إثبت أن $L\{x\cos ax\} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$

**الحـــل:**

لدينا $L = \{\cos ax\} = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$

بتطبيق نظرية (٢) فإن :

$$L\{x \cos ax\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2 + a^2}\right)$$

$$= \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

**نظرية** (٣) : (تغير المقياس) *Change of scale*

إذا كان $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$

فإن $L\{f(ax)\} = \dfrac{1}{a}\bar{f}\left(\dfrac{p}{a}\right)$

---

**مثـــال:**

أوجد $L\{\sin 3x\}$

**الحـــل:**

لدينا $L\ \{\sin x\} = \dfrac{1}{p^2 + 1}$

فإن $L\ \{\sin 3x\} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{3}\right)^2 + 1} = \dfrac{3}{p^2 + 9}$

**نظرية (٤):**

إذا كان $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$ ، فإن $L\{\int_0^x (f(u)du\} = \dfrac{\bar{f}(p)}{p}$

**مثـــــال:**

أوجد $L\{\int_0^x \sin 2u du\}$

**الحـــــل:**

لدينا $L\{\sin 2x\} = \frac{2}{p^2+4}$ فيكون $L\{\int_0^x \sin 2u du\} = \frac{2}{p(p^2+4)}$

**نظرية (٥) : القسمة على x**

إذا كان $L(f(x)) = \bar{f}(p)$ فإن $L\{\frac{f(x)}{x}\} = \int_p^\infty \bar{f}(u) du$

بشرط أن تكون $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ موجودة

---

**مثـــــال:**

أوجد $L = \{\frac{\sin x}{x}\}$

**الحـــــل :**

حيث أن $L\{\sin x\} = \frac{1}{p^2+1}$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

فإن $L = \{\frac{\sin x}{x}\} = \int_p^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(\frac{1}{p})$