٣- تحويلات لابلاس العكسية *Inverse Laplace transforms*

من تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وجدنا أن

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

وبافتراض أن L^{-1} هو المؤثر العكسي للمؤثر L فإن :

$$f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$$

وعلى هذا فإنه مما سبق يمكن بسهولة استنتاج ما يلي:

١- إذا كان $L=\{1\}\dfrac{1}{p}$ فإن $L^{-1}\{\dfrac{1}{p}\}=1$

٢- إذا كان $L\{x^n\}=\dfrac{n!}{p^{n+1}};n=1,2,3....$ فإن $L^{-1}\{\dfrac{n!}{p^{n+1}}\}=x^n;n=1,2,3$

٣- إذا كان $L\{e^{ax}\}=\dfrac{1}{p-a}$ فإن $L^{-1}\{\dfrac{1}{p-a}\}=e^{ax}$

٤- إذا كان $L\{\cos ax\}=\dfrac{p}{p^2+a^2}$ فإن $L^{-1}\{\dfrac{p}{p^2+a^2}\}=\cos ax$

وهكذا بالنسبة لباقى الدوال

مثـــال:

أوجد $L^{-1}\{\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$ حيث $a\,,\,b$ ثابتان .

الحـــل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}=\frac{A}{p+a}+\frac{B}{p+b}$$

بالضرب فى $(p+a)\,(p+b)$ وبمساواة المعاملات نجد أن

$$A=-B=\frac{1}{a-b}$$

ومنها نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}=\frac{1}{a-b}[\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\}=\frac{1}{a-b}[L^{-1}\{\frac{1}{p+a}-L^{-1}\frac{1}{p+b}]$$

$$=\frac{1}{a-b}(e^{-ax}-e^{-bx})$$

وبالتالى فإن

$$L^{-1}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\}=\frac{1}{a-b}(e^{-ax}-e^{-bx})$$

مثـــال:

أوجد $L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ حيث a , b ثابتان حقيقيان.

الحـــل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\frac{1}{b^2-a^2}[\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\} = \frac{1}{b^2-a^2}[L^{-1}\{\frac{p}{p^2+a^2}\} - L^{-1}\{\frac{p}{p^2+b^2}\}]$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}(\cos ax - \cos bx)$$

وبالتالى

$$[L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\} = \frac{1}{b^2-a^2}(\cos ax - \cos bx)]$$

مثـــــال:

أوجد $L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\}$ حيث a ثابت.

الحـــــل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{a}{p(p+a)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{p}\} - L^{-1}\{\frac{1}{p+a}\}$$
$$= 1 - e^{-ax}$$

وبالتالى

$$L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\} = 1 - e^{-ax}$$

٤ - تحويلات لابلاس للمشتقات *Laplace Transforms of Derivatives*

نفترض أن الدالة $y(x)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ، فإن مؤثر لابلاس للمشتقة يكتب على الصورة $\frac{dy}{dx}$.

ويعرف كالآتى : $L\{\frac{dy}{dx}\} = \int_0^\infty e^{-px}\frac{dy}{dx}dx$ أى

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = \int_0^\infty e^{-px} dy$$

$$= [ye^{-px}]_0^\infty + p\int_0^\infty ye^{-px} dx$$

$$= -y(0) + pL\{y(x)\}$$

وبالتالى

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = p\bar{y}(p) - y(0) \qquad (1)$$

ويعرف تحويل لابلاس للمشتقة الثانية كالآتى:

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = \int_0^\infty e^{-px} \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} d(\frac{dy}{dx})$$

$$= [\frac{dy}{dx}e^{-px}]_0^\infty + p\int_0^\infty \frac{dy}{dx}e^{-px}dx$$

ومن العلاقة (١) يكون

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = -y^{(1)}(0) + p(py) - y(0))$$

من هذا نحصل على

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = p^2\bar{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0) \qquad (2)$$

حيث $y\ (0)$ هى قيمة $y(x)$ محسوبة عند x

$= 0$ و $y^{(1)}$ هى قيمة $\frac{dy}{dx}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$.

والصيغة العامة هى

$$L\{\frac{d^ny}{dx^n}\} = p^n\bar{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{(1)}(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) \qquad (3)$$

حيث $y^{(r)}(0)$ هى قيمة $\frac{d^r y}{dx^r}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$ و $r - 0,1,....n - 1$.

٥ - تطبيقات تحويل لابلاس :

سوف نستخدم تحويل لابلاس ومعكوسة فى حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية .

أ- حل المعادلات التفاضلية العادية:

كتطبيق لتحويلات لابلاس سندرس فى الأمثلة الآتية كيفية إيجاد الحل للمعادلة التفاضلية العادية وذلك باستخدام تحويلات لابلاس.

مثـــال:

أوجد حل المعادلة النفاضلية العادية $\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

حيث $y(0) = 1$

الحـــل:

بالتأثير بموثر لابلاس على طرفى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$L\{\frac{dy}{dx}\} + 2L\{y(x)\} = L\{\cos x\}$$

لدينا

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = p\bar{y}(p) - y(0)$$

$$L\{y(x)\} = \bar{y}(p)$$

$$L\{\cos x\} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

فنحصل على

$$py(p) - y(0) + 2y(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

وبالتالى فإن

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{y(0)}{(p+2)}$$

ولكن من الشروط الإبتدائية $y\ (0) = 1$ نحصل على :

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{1}{(p+2)}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = -\frac{2}{5}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{5}(\frac{1+2p}{p^2+1})$$

ومنها

$$\bar{y}(p) = -\frac{2}{5}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{5}(\frac{1+2p}{p^2+1}) + \frac{1}{p+2}$$

$$= \frac{1}{5}(\frac{1}{p^2+1}) + \frac{2}{5}(\frac{p}{p^2+1}) + \frac{3}{5}(\frac{1}{p+2})$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى نحصل على

$$y(x) = \frac{1}{5}L^{-1}\{\frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{5}L^{-1}\{\frac{p}{p^2+1}\} + \frac{3}{5}L^{-1}\{\frac{1}{p+2}\}$$

$$= \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{5}e^{-2x}$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{5}e^{-2x}$$

مثـــــال

حل المعادلة $y'(0) = 2 \quad , \quad y(0) = 1$ و $y'' + y = x$

الحـــــل:

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} + L\{y(x)\} = L\{x\}$$

وبالتالى فإن

$$p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية

$$p^2\bar{y}(p) - p + 2 + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وعليه فإن

$$\bar{y} = L\{y\} = \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{p-2}{p^2+1}$$

بالتحليل إلى كسور جزئية فنحصل على

$$\bar{y} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسى نحصل على

$$y = L^{-1}\{\frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}\}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = x + \cos x - 2\sin x$$

مثـــــال:

حل المعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}, \qquad y(0) = -3, y'(0) = 5$$

الحـــــل:

باستخدام مؤثر لابلاس على المعادلة نحصل على

$$l\{\frac{d^2y}{dx^2}\} - 3L\{\frac{dy}{dx}\{+2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

وبالتالى

$$\{p^2y - py(0) - y'(0)\} - 3\{p\bar{y} - y(0)\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية فنجد أن

$$\{p^2\bar{y} - 3p - 5\} - 3\{p\bar{y} + 3\} + 2y = \frac{4}{p-2}$$

وعلى ذلك

$$\bar{y} = \frac{4}{(p^2 - 3p + 2)(p-2)} + \frac{14 - 3p}{P^2 - 3p + 2}$$

$$\bar{y} = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن :

$$\bar{y} = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسى فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = -7\,e^x + 4\,e^{2x} + 4\,x\,e^{2x}$$