الباب السادس

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

سوف ندرس في هذا الباب بعض المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة التـــي لهما أهمية خاصة .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

"The differential equation variant coefficient"

تسمى المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_o y = f(x) \;, \qquad a_n \neq 0$$

حيث أن كل من $f(x), a_o, a_1, \ldots, a_n$ دوال فى المتغير المستقل x بمعادلة تفاضلية من الرتبة النونية غير متجانسة ذات معاملات متغيرة .بحيث أن $f(x) \neq 0$ أما إذا كـــان $f(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_o y = 0$$

تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة النونية متجانسة ذات معاملات متغيرة حيث أن كـــل من $a_o, a_1, \ldots, a_n$ دوال فى المتغير المستقل x .

١- معادلة أويلر التفاضلية : "Euler's differential equation"

معادلة أويلر التفاضلية من الرتبة الثانية تأخذ الصورة

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_oy = f(x) \qquad (1)$$

حيث a_2, a_1, a_o ثوابت .

لحل المعادلة *(1)* فإننا نستخدم التعويض

$$x = e^t \qquad or \qquad t = \ln x$$

وهذا التعويض يحول المعادلة *(1)* ذات المعاملات المتغيرة إلى معادلة تفاضلية مناظرة ذات معاملات ثابتة كالآتى :

نفترض أن $\theta = \dfrac{d}{dt} \;\; , \;\; D = \dfrac{d}{dx}$

بذلك نجد أن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

أى أن $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$

ومنها فإن $xD = \theta \qquad (3)$

وأيضاً

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}.\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dt} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right).\frac{dt}{dx}$$

بذلك يكون $$D^2 = \frac{-1}{x^2}\theta + \frac{1}{x^2}\theta^2$$

أى أن $$x^2D^2 = \theta(\theta - 1) \qquad (4)$$

من العلاقات (4) , (3) يمكن بسهولة إثبات أن

$$x^3D^3 = \theta(\theta-1)(\theta-2)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x^nD^n = \theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-n+1)$$

والآن بالتعويض من المعادلتين (4) و (3) فى المعادلة (1) نجد أن

$$a_2\theta(\theta-1)y + a_1\theta\ y + a_o y = f(e^t)$$

ومنها $$(a_2\theta^2 + (a_1 - a_2)\theta + a_o)y = f(e^t)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته . وبالتالى يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة أويلر التفاضلية (1) كما سنوضح ذلك فى الأمثلة الآتية.

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2D^2 - 2xD + 2)y = 4x^3$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ ونفترض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta\ (\theta - 1) - 2\theta + 2)y = 4e^{3t}$$

ومنها

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 4e^{3t}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

لحل المعادلة المتجانسة

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى

$$\lambda_1 = 1 \qquad , \lambda_2 = 2$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P = \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2}\{4e^{3t}\}$$

$$= \frac{1}{3^2 - 3\times 3 + 2}\ .\ 4e^{3t} = 2e^{3t}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + 2e^{3t}$$

ولكن $x=e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x+c_2x^2+2x^3$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3D^3+2xD-2)y=0$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x=e^t$ وبفرض أن $\theta=\frac{d}{dt}$ فإن

$$xD=\theta$$

$$x^2D^2=\theta(\theta-1)$$

$$x^3D^3=\theta(\theta-1)(\theta-2)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta\ (\theta-1)(\theta-2)+2\theta-2)y=0$$

ومنها

$$(\theta^3-3\theta^2+4\theta-2)y=0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة متجانسة ذات معاملات ثابتة .

نفترض أن الحل لها هو $y=e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$$

بالتحليل
$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=0$$

فتكون الجذور هى
$$\lambda_1=1 \qquad ,\lambda_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm i$$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^t+e^t(c_2\cos t+c_3\sin t)$$

ولكن $x=e^t$ ومنها $t=\ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x+x(c_2\cos(\ln x)+c_3\sin(\ln x))$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y''-6y=x^2+\frac{1}{x^2}$$

<u>الحـــــل :</u>

باستخدام التعويض $x=e^t$ وبفرض أن $\theta=\frac{d}{dt}$ فإن

$$xD=\theta$$

$$x^2D^2=\theta(\theta-1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$(\theta\,(\theta-1)-6)y=e^{2t}+e^{-2t}$$

ومنها $(\theta^2-\theta-6)y=e^{2t}+e^{-2t}$

المعادلة المتجانسة هى $(\theta^2-\theta-6)y=0$

نفترض أن الحل على الصورة $y=e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى $\lambda^2-\lambda-6=0$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda_1=3 \quad ,\lambda_2=-2$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$
\begin{aligned}
y_P &= \frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{2t}+e^{-2t}\} \\
&= \frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{2t}\}+\frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{-2t}\} \\
&= \frac{e^{2t}}{4-2-6}+\frac{e^{-2t}}{(\theta-2)^2-(\theta-2)-6}\{1\} \\
&= \frac{-1}{4}e^{2t}+e^{-2t}\frac{1}{\theta^2-5\theta}\{1\} \\
&= \frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta}{5})^{-1}\{1\} \\
&= \frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots)\{1\} \\
&= \frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(t+\frac{1}{5})
\end{aligned}
$$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(t+\frac{1}{5})$$

ولكن $x=e^t$ ومنها $t=\ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x^3+c_2x^{-2}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}x^{-2}(\ln x+\frac{1}{5})$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3D^3+2xD-2)y=x^2\log x+x$$

<u>الحـــل :</u>

بالتعويض عن $x=e^t$ فإننا نحصل على المعادلة ذات المعاملات الثابتة

$$(\theta^3-3\theta^2+4\theta-2)y=te^{2t}+e^t$$

كما فى مثـــال (٢) وجدنا أن

$$y_h=c_1e^t+e^t(c_2\cos t+c_3\sin t)$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P=\frac{1}{\theta^3-3\theta^2+4\theta-2}\{te^{2t}+e^t\}$$

$$=\frac{1}{\theta^3-3\theta^2+4\theta-2}\{te^{2t}\}+\frac{1}{\theta^3-3\theta^2+4\theta-2}\{e^t\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{(\theta+2)^3 - 3(\theta+2)^2 + 4(\theta+2) - 2}\{t\}$$

$$+ \frac{e^{t}}{(\theta+2)^3 - 3(\theta+2)^2 + 4(\theta+2) - 2}\{I\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{\theta^3 + 3\theta^2 + 4\theta + 2}\{t\} + \frac{e^{t}}{\theta^3 + \theta}\{I\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}(1 + \frac{4\theta + 3\theta^2 + \theta^3}{2})^{-1}\{t\} + e^{t}\frac{1}{\theta}(1+\theta^2)^{-1}\{I\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}(1 - 2\theta + \ldots)\{t\} + e^{t}(\frac{1}{\theta} - \ldots)\{I\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}(t-2) + te^{t}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{t} + e^{t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t) + \frac{1}{2}(t-2)e^{2t} + te^{t}$$

ولكن $x = e^{t}$ ومنها $t = \ln x$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + x(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x)) + \frac{1}{2}(\ln x - 2)x^2 + x \ln x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x$$

الحـــل :

نفترض أن $x = e^{t}$ و أن $\theta = \frac{d}{dt}$ وعليه فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$$

$$x^3D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1)(\theta - 2) - 4\theta(\theta - 1) + 8\theta - 8)y = 4t$$

ومنها

$$(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 4t$$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$

بالتحليل

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

فتكون الجذور هى

$$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 4$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8}\{4t\}$$

$$= \frac{4}{-8}(1 - \frac{14\theta - 7\theta^2 + \theta^3}{8})^{-1}\{t\}$$

$$= \frac{-1}{2}(1 + \frac{14}{8}\theta + \ldots\ldots)\{t\}$$

$$= \frac{-1}{2}(t + \frac{14}{8})$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2}(t + \frac{14}{8})$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{16}(8\ln x + 14)$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - xy' - 3y = x^5$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta-1)-\theta-3)y=e^{5t}$$

ومنها

$$(\theta^2-2\theta-3)y=e^{5t}$$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2-2\theta-3)y=0$$

نفترض أن الحل لها هو $y=e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى

$$\lambda_1=3 \quad ,\lambda_2=-1$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P=\frac{1}{\theta^2-2\theta-3}\{e^{5t}\}$$

$$=\frac{1}{25-10-3}\,.\,e^{5t}=\frac{1}{12}e^{5t}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}+\frac{1}{12}e^{5t}$$

ولكن $x=e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x^3+c_2x^{-1}+\frac{1}{12}x^5$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 5x^2 + 6$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ *وبفرض أن* $\theta = \frac{d}{dt}$ *فإن*

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1) + 2\theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$$

ومنها

$$(\theta^2 + \theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 + \theta - 6)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى

$$\lambda_1 = 2 \qquad , \lambda_2 = -3$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P=\frac{1}{\theta^2+\theta-6}\{5e^{2t}+6\}$$

$$=5\ e^{2t}\frac{1}{(\theta+2)^2+(\theta+2)-6}\{1\}+\frac{1}{\theta^2+\theta-6}\{6\}$$

$$=5\ e^{2t}\frac{1}{\theta^2+5\theta}\{1\}-\frac{1}{6}(1-\frac{\theta+\theta^2}{6})^{-1}\{6\}$$

$$=5\ e^{2t}\frac{1}{5\theta}(1+\frac{\theta}{5})^{-1}\{1\}-(1-\frac{\theta+\theta^2}{6})^{-1}\{1\}$$

$$=e^{2t}\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta}{5}+\ldots\ldots)\{1\}-(1-\ldots\ldots)\{1\}$$

$$=e^{2t}(t-\frac{1}{5})-1$$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}+e^{2t}(t-\frac{1}{5})-1$$

ولكن $x=e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x^2+c_2x^{-3}+x^2(\ln x-\frac{1}{5})-1$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y''+6xy'+6y=\ln x$$

الحـــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta - 1) + 6\theta + 6)y = t$$

ومنها

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = t$$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = 0$$

نفترض أن الحل على الصورة $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda_1 = -2 \quad , \lambda_2 = -3$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{\theta^2 + 5\theta + 6}\{t\}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5\theta + \theta^2}{6}\right)^{-1}\{t\}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{5\theta}{6} + \ldots\ldots\right)\{t\}$$

$$= \frac{1}{6}\left(t - \frac{5}{6}\right)$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{36}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \frac{1}{6}\ln x - \frac{5}{36}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

تمـــاريـــن

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^2$
2. $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 4x + 6x^3$
3. $x^2y'' + 5xy' + 3y = (1 + \frac{1}{x})^2 \log x$
4. $x^2y'' + 5xy' + 4y = \frac{1}{x^2}$
5. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \log x$
6. $x^2y'' + xy' + y = \ln x$
7. $x^2y'' + 6xy' + 6y = \ln x$
8. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3\log x$
9. $x^2y'' - 2xy' + 2y = (\log x)^2 - \log x^2$
10. $2x^2y'' + 15xy' - 7y = \sqrt{x}$
11. $x^2y'' - xy' + 4y = \cos(\log x)$
12. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 32x^2$
13. $x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2$
14. $x^2y'' - xy' = 2$
15. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 2x^3$
16. $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2 \log x + 3x$

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الآتية :

(1) $x^2y'' - 6y = \ln x$, $\quad y(1) = \frac{1}{6}$, $\quad y'(1) = \frac{-1}{6}$

(2) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^3$, $\quad y(-2) = 1$, $\quad y'(-2) = 7$