جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الثالثة

مقرر : جبر الحلقات

المحاضرة الاولى (١)

(المصدر)

الحلقات ، الحلقيات والجبر الخطي

ب. هارتلي / جامعة مانشستر

ب.هاوكس / جامعة وارك

ترجمة : يوسف عبدالله و احمد حميد

قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة الملك سعود

الحلقات - تعاريف وأمثلة

١ - تعريف الحلقة

تعتبر الحلقة موضوعا طبيعيا للدراسة؛ لأنها تدخل في كثير من التخصصات الرياضية المهمة والمتنوعة وسيتضح ذلك من الأمثلة التي سنقدمها.

تعتبر مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نموذجا تعرّف على أساسه الحلقة، لذلك نجد أن الشروط التي تدخل في تعريف الحلقة مستنبطة من بعض الصفات المهمة لمجموعة الأعداد الصحيحة التي ستظهر بشكل متكرر كمصدر للإلهام والأمثلة عن الحلقات. الحلقة R، مثل الأعداد الصحيحة، مجموعة مع عمليتين ثنائيتين، تسميان عادة الجمع (addition) (ويرمز له بالرمز +) والضرب (multiplication) (ويرمز له بأن تكتب العناصر جنب بعضها). تشكل R حلقة إذا كانت زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الجمع، وشبه زمرة بالنسبة لعملية الضرب. وتحقق العمليتان قوانين التوزيع التي تربط بينهما.

لنكن أكثر دقة. نتذكر أولا أن العملية الثنائية على مجموعة S هي تطبيق μ $S \times S \to S$: حيث تمثل $S \times S$ الجداء الديكارتي لـ S في نفسها؛ أي أن $S \times S$ هي مجموعة كل الأزواج المرتبة (a, b) حيث $a, b \in S$. سنكتب عادة صورة الزوج المرتب (a, b) تحت تأثير μ بالشكل $a * b$ حيث $*$ الرمز المناسب للعملية الثنائية. يلاحظ أن الترتيب مهم؛ حيث إنه قد يكون $a * b$ و $b * a$ عنصرين مختلفين في S. وفي حالة كون $a * b = b * a$ لكل $a, b \in S$ فإن العملية $*$ تسمى إبدالية (commutative). بنفس الروح يسمى غالبا أي تطبيق من S إلى نفسها عملية أحادية (unary operation).

(١-١) تعاريف

(ا) **شبه الزمرة (semigroup)**. هي مجموعة غير خالية S مع عملية ثنائية $*$ تحقق خاصة التجميع، أي أن :

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

لكل $a, b, c \in S$.

(ب) **الزمرة (group)**. هي مجموعة غير خالية G مع عملية ثنائية $*$ وأخرى أحادية $x \to \bar{x}$ وتحتوي المجموعة G على عنصر مختار e بحيث :

(i) تشكل G شبه زمرة بالنسبة إلى $*$

(ii) $a * e = e * a = a$ لكل $a \in G$

(iii) $a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$ لكل $a \in G$

يسمى العنصر e **العنصر المحايد (identity element)** أو **(neutral element) للزمرة G**، ويسمى $\bar{a}$ **معكوس a (*inverse*)**. يعتبر استخدام رمزَ الضرب أو رمز الجمع للزمر ممارسة ثابتة، وعندئذ يستخدم a^{-1} بدلا من $\bar{a}$، ويكتب عادة 1 بدلا من e في حالة استخدام رمز الضرب، بينما يستخدم $-a$ بدلا من $\bar{a}$ ويكتب 0 بدلا من e في حالة استخدام رمز الجمع. ويستخدم عادة (وليس دائما) رمز الجمع في حالة كون العملية الثنائية المعرّفة على الزمرة إبدالية. وتسمى الزمر الإبدالية عادة بالزمر «الآبيلية» تشريفا للرياضي النرويجي المتميز ن. آبل (N.H. Abel) (١٨٠٢-١٨٢٩م) الذي درس صنفا من المعادلات الجبرية التي لها علاقة بالزمر الإبدالية. نتذكر من المعلومات الأولية عن الزمر أن العنصر المحايد وحيد وكذلك المعكوس.

(جـ) **الحلقة (ring)**. هي مجموعة غير خالية R مع عمليتين ثنائيتين مربوطتين بقوانين التوزيع؛ بحيث تشكل R زمرة إبدالية بالنسبة للعملية الثنائية الأولى (كاصطلاح تسمى الجمع، ويرمز لها بالرمز +) كما تشكل R شبه زمرة بالنسبة للعملية الثنائية الأخرى (تسمى الضرب، ويرمز لها بأن تكتب العناصر جوار بعضها). تربط قوانين التوزيع من اليسار ومن اليمين هاتين العمليتين كما يلي :

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

لكل $a, b, c \in R$. *قد يجد القارئ أنه من الأنسب هنا أن يكتب شروط الحلقة بالتفصيل .*

من الواضح أن الأعداد الصحيحة (التي سبق أن رمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$) مع عمليتي الجمع العادي والضرب العادي تحقق شروط الحلقة . يلاحظ - لحسن الحظ - أن شروط الحلقة لا تُميِّز $\mathbb{Z}$ ؛ حيث لو حدث ذلك لوصلنا إلى طريق مسدود في «نظرية الحلقات» ، وهذا لا يقلل من أهمية دراسة الأعداد الصحيحة ، ولكن يؤكد فقط أن الحلقة مفهوم له مجالات واسعة وأنها تتجلى في مظاهر كثيرة ، وتتضمن حالات مختلفة . لكي نوضح أن حلقة الأعداد الصحيحة حالة خاصة من بين الحلقات ، نشير إلى أن ضربها إبدالي ، وأنها مرتبة وقابلة للعد ، ولها مجايد ضربي ولها تحليل ذو ميزات جيدة ، ولم نشر إلى كل هذه الخواص في تعريف الحلقة . ستوضح الأمثلة التالية أن تعريف الحلقة كان باعثا على تكوين تشكيلة متنوعة من البنى الجبرية .

٢- بعض الأمثلة على الحلقات

لكي نفهم نظرية رياضية عامة ، من المهم أن نجرّبها على بعض الأمثلة الملموسة ، وإن أمكن المألوفة ، حيث لا تتضح أهمية النظرية على الأغلب إلا بعد معرفة تطبيقاتها على بعض الحالات الخاصة أو الأمثلة البسيطة . وهذا يبين قيمة وجود أمثلة متنوعة عن البنية الجبرية التي نقوم بدراستها . ما المقومات الأخرى لفهم برهان ما ؟ يلاحظ أن منطوق المبرهنة يحتوي على مجموعة من المعطيات يتبعها بعض النتائج ، وأحد الأنشطة الفعالة للطالب هو أن يخوض في تفاصيل البرهان ، ويعين بدقة أين استخدمت كل فرضية ، ثم يسأل هل تبقى المبرهنة صحيحة تحت شروط أقل ؟ وقد يتطلب ذلك منه إعطاء أمثلة مناقضة لإثبات أن المبرهنة لن تبق صحيحة تحت فرضيات أضعف . وهكذا فإن وجود قائمة من الأمثلة الذهنية مفيد مرة أخرى . لذلك نؤكد أهمية الأمثلة في هذا الكتاب . سنبدأ بإعطاء قائمة قصيرة من أمثلة الحلقات التي سنرجع إليها بشكل متكرر . سنتعلم في البابين القادمين طرقا عامة في بناء حلقات جديدة من حلقات معطاة .

مثال حلقة (١)

إذا كان $n \in \mathbb{Z}$، فإن المجموعة الجزئية

$$n\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ يقسم } n\}$$

من مجموعة الأعداد الصحيحة، مغلقة تحت تأثير الجمع و الضرب. من الواضح أنها تحقق شروط الحلقة، وبالتالي فهي نفسها حلقة.

مثال حلقة (٢)

نفرض أن n عدد صحيح موجب ثابت ولنعرف على $\mathbb{Z}$ علاقة التكافؤ ~ كما يلي:

$a \sim b$ إذا، وفقط إذا كان $a - b$ يقبل القسمة على n.

يرمز لفصل التكافؤ الذي يحوي a بـ $[a]$. يمكن إثبات أن $[0], [1],..., [n-1]$ هي كل فصول تكافؤ العلاقة ~. أي أنه لا يوجد تكافؤ بين عنصرين مختلفين من المجموعة $\{0, 1, ..., n-1\}$ وكل عدد صحيح يكافئ أحد عناصر هذه المجموعة. تسمى فصول التكافؤ المذكورة آنفا بفصول التطابق قياس n (congruence classes modulo n) أو فصول الرواسب قياس n (residue classes modulo n)، ويرمز لمجموعة فصول التطابق قياس n بالرمز $\mathbb{Z}_n$. سيتضح أنه لو عرّفنا جمع فصول التطابق وضربها اعتمادا على مُمثّلاتها (أي أن $[a] + [b] = [a + b]$ و $[a][b] = [ab]$)، فإن هاتين العمليتين تكونان معرفتين جيدا وتحولان المجموعة $\mathbb{Z}_n$ إلى حلقة، وهذه الحلقة بها عدد منته من العناصر هو n. سنثبت ذلك بالتفصيل في الفصل الثاني في الجزء الخاص بحلقات القسمة. قد يرغب القارئ في التعرف أكثر على هذه الحلقات بكتابة جدولي جمع وضرب عناصر $\mathbb{Z}_6$ مثلا، ويقنع نفسه بتحقيقها شروط الحلقة. نلاحظ مثلا في $\mathbb{Z}_6$ أن $[3] + [5] (= [8]) = [2]$ وأن $[3] [5] (= [15]) = [3]$.

مثال حلقة (٣)

نستطيع أن نجعل أي زمرة إبدالية A حلقة بتعريف $ab = 0$ لكل $a, b \in A$. سنترك التأكد من كون A تحقق شروط الحلقة كتمرين.

مثال حلقة (٤)

مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ تشكل حلقة بالنسبة إلى عمليتي الجمع العادي والضرب العادي. وفي الحقيقة إنها حلقة إبدالية (الضرب إبدالي)، بل وأكثر من ذلك يوجد لها محايد ضربي، كما يمكن القسمة على عناصر غير صفرية. يمكن التحقق بسهولة من كون المجموعتين الجزئيتين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ من $\mathbb{C}$ واللتين ترمزان على الترتيب إلى الأعداد الحقيقية والأعداد النسبية، تشكلان حلقتين تحت تأثير عمليتي الجمع العادي والضرب العادي.

مثال حلقة (٥)

لنعتبر المجموعة الجزئية التالية من $\mathbb{C}$:

$$J = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

يمكن بسهولة إثبات أن عمليات الجمع والضرب والطرح العادية عمليات مغلقة في J ويتبع ذلك مباشرة أن J تحقق شروط الحلقة. تسمى J حلقة أعداد جاوس (ring of Gaussian integers).

مثال حلقة (٦)

لمجموعة معطاة X، نفرض أن $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X (مشتملة على X نفسها وعلى المجموعة الخالية ϕ). تسمى $P(X)$ مجموعة القوة (power set) للمجموعة X. إذا كانت X منتهية ولها n من العناصر، فإن $P(X)$ لها 2^n من العناصر، لأنه عند تكوين مجموعة جزئية من X فإن أي عنصر من X يعطي إمكانيتين على حسب وجود العنصر في المجموعة الجزئية أو وجوده خارجها. وعليه فإن العدد الكلي للمجموعات الجزئية هو 2^n. من المدهش نوعا ما أنه يمكن دائما أن تعطى بنية الحلقة لمجموعة القوة بالطريقة التالية. لكل $A, B \in P(X)$ ، نعرف :

$$A + B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) \qquad \text{«اتحاد منفصل»}$$

$$AB = A \cap B$$

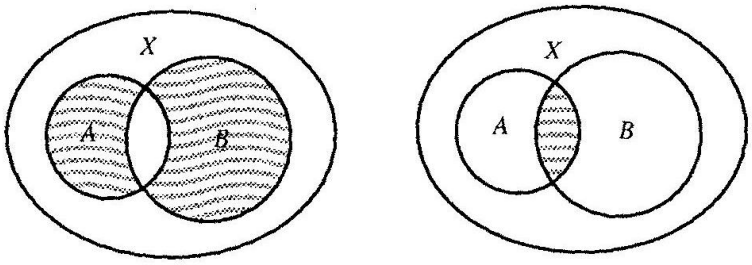
حيث يرمز $C \backslash D$ إلى المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي إلى C ولا تنتمي إلى D. هذان التعريفان يحققان شروط الحلقة. مثال ذلك :

$$A + \phi = (A \cup \phi)\backslash(A \cap \phi) = A\backslash\phi = A = \phi + A$$

لذلك فإن ϕ المحايد الجمعي أو الصفر . أيضا :

$$A + A = (A \cup A)\backslash(A \cap A) = A\backslash A = \phi$$

لذلك فإن A هو معكوس نفسه الجمعي ، أي أن $-A = A$. سنترك التأكد من تحقق باقي شروط الحلقة كتمرين . بعض هذه الشروط واضح وبعضها يحتاج إلى تفكير بسيط ولكنها تبدو للعيان أكثر وضوحا باستخدام أشكال فن (Venn diagrams) :



$A+B$ $\qquad$ AB

لاحظ أنه عندما يكون الضرب إبداليا كما في هذه الحالة فإن أحد قانوني التوزيع يؤدي إلى الآخر ، لذلك يكتفى بالتأكد من أحدهما .

مثال حلقة (٧)

نفرض أن $M_n(K)$ مجموعة كل المصفوفات المربعة من النوع n على الحقل K . يستطيع القارئ أن يتصور أن K هو حقل الأعداد الحقيقية إذا رغب .

لنتذكر عمليتي الجمع والضرب في $M_n(K)$. إذا كان $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ عنصرين من $M_n(K)$ ، فإن

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$AB = (c_{ij})$$

حيث

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

يلاحظ أن $M_n(K)$ تشكل حلقة بالنسبة لهاتين العمليتين . وترتبط هذه الحلقة بشكل أساسي بحلقة أخرى ، من المحتمل أن يكون القارئ قد تعرف عليها ، وهي حلقة

التحويلات الخطية لفضاء متجه على K ذي بعد n، وسندرس هذه العلاقة بتفصيل أكثر لاحقا. إذا كان $n > 1$، فإن هذه الحلقة غير إبدالية وبهذا فهي تختلف عن الأمثلة السابقة. يستطيع القارئ أن يلاحظ ذلك باعتبار المصفوفتين :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أو مصفوفات أخرى شبيهة لهما.

مثال حلقة (٨)

لكل مجموعة X (حتى ولو كانت خالية وتستطيع استبعادها إذا رأيت ذلك) تشكل مجموعة كل التطبيقات $f : X \to \mathbb{R}$ حلقة بالنسبة للعمليتين المعرفتين هكذا :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

يسمى هذا أحيانا التعريف النقطي (pointwise definition) للجمع والضرب، وهو يستخدم بنية الحلقة $\mathbb{R}$ في إعطاء بنية الحلقة لمجموعة التطبيقات. سنترك للقارئ التفاصيل (والتعميم ؟). إذا كانت X هي $\mathbb{R}$ فإن حلقات أخرى يمكن الحصول عليها بهذه الكيفية ؛ فعلى سبيل المثال، تشكّل مجموعة الدوال المستمرة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ومجموعة الدوال القابلة للتفاضل من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ . . . الخ كلها حلقات بالنسبة للعمليتين النقطيتين المشار إليهما سابقا.

مثال حلقة (٩)

لتكن $\mathbf{l}$، $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ عناصر من $M_2(\mathbb{C})$ معرفة كما يلي :

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه يمكن إساءة استخدام الرموز باستعمال رمز واحد للإشارة إلى حاجتين مختلفتين، فعلى سبيل المثال يرمز 1 إلى العدد المركب 1 كما يرمز إلى المصفوفة المحايدة من النوع 2×2 على $\mathbb{C}$، بالرغم من أنه يمكن استخدام طابعتين للتمييز بينهما.

هذه الممارسة غير المناسبة ضرورية دائما في الرياضيات إذا أريد تجنب الانغماس في فوضى الرموز، ولكن من الضروري أن يلاحظ ذلك عندما يحدث.

نفرض أن V هي مجموعة كل العناصر من $M_2(\mathbb{C})$ التي على الصيغة :

$$\mathbf{x} = a\,\mathbf{l} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. وعليه فالصيغة العامة لعنصر من V هي :

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. يمكن التحقق مباشرة أن ضرب المصفوفات $\mathbf{l, i, j, k}$ يكون حسب ما يلي :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \qquad (2)$$

ومعادلتين مشابهتين لـ $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ نحصل عليهما بإبدال $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$، $\mathbf{i}$ دورويا.

يمكن باستخدام قوانين المصفوفات أن نثبت أن مجموع وحاصل ضرب أي عنصرين من V ينتميان لها، وأنه إذا كان $x \in V$ فإن $-x$ كذلك. لذلك فإن عمليتي الحلقة $M_2(\mathbb{C})$ تعينان عمليتين مناظرتين على V. وبذلك فإن شروط الحلقة تتحقق على V، وبالتالي فإن V حلقة جزئية (subring) من $M_2(\mathbb{C})$ وسنقدم مفهوم الحلقة الجزئية بدقة لاحقا. تسمى V حلقة المرباعيات (ring of quaternions).

إذا كانت x كما في (1)، فإننا نعرف $\bar{\mathbf{x}}$ نعرف كما يلي :

$$\bar{\mathbf{x}} = a\mathbf{l} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

تسمى $\bar{\mathbf{x}}$ المرباع المرافق (conjugate) لـ $\mathbf{x}$. يستطيع القارئ، بحساب $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}$، باستخدام العلاقات في (2)، أن يتحقق من أن كل مصفوفة غير صفرية في V تكون غير شاذة ومعكوسها في V. في الحقيقة إذا كانت $\mathbf{x}$ لا تساوي صفرا، فإن :

$$\mathbf{x}^{-1} = \lambda\bar{\mathbf{x}}$$

حيث λ هو العدد الحقيقي $1/(a^2+b^2+c^2+d^2)$. لذلك فإن القسمة على عناصر غير صفرية ممكنة دائما في V. ومن ناحية أخرى فإن الضرب في V غير إبدالي، كما يلاحظ ذلك في العلاقات (2). لذلك يمكن أن يقال بشكل عام، إن حلقة المرباعيات هي أسوأ بدرجة ما من حلقة الأعداد المركبة. ويلاحظ أن V تحوي عدة مجموعات

جزئية تشابه $\mathbb{C}$ مثل $\{a\mathbf{l} + b\mathbf{i}\}$ و $\{a\mathbf{l} + b\mathbf{j}\}$ . . . الخ . ستسمح لنا فكرة التماثل لاحقا بأن نكون أكثر دقة .

مثال حلقة (١٠)

نفرض أن A زمرة جمعية إبدالية إختيارية . نقول عن تشاكل (homomorphism) من A إلى نفسها بأنه **تشاكل داخلي** (endomorphism)، أي أن $\alpha : A \to A$ تطبيق يحقق الشرط $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$. يمكن أن تعطى مجموعة كل التشاكلات الداخلية End A للزمرة A بنية الحلقة بطريقة طبيعية بتعريف الجمع والضرب كما يلي :

$$(\alpha + \beta)(a) = \alpha(a) + \beta(a)$$

$$(\alpha\beta)\,(a) = \alpha(\beta(a))$$

لكل $a \in A$ ولكل $\alpha, \beta \in \text{End } A$. لذلك فإن تعريف الجمع هو نقطي ، والضرب هو تركيب تطبيقات . يجب على القارئ أن يقنع نفسه أن ذلك يجعل End$A$ حلقة . نشير إلى أن الخطوة الأولى لمعرفة أن حواصل جمع التشاكلات الداخلية وضربها تمثل تشاكلات داخلية هي التأكد من أن التعاريف السابقة تعطي عمليات ثنائية على End$A$. و يلاحظ أن كون A زمرة إبدالية ، هو الذي يضمن ذلك بينما لا يكون ذلك صحيحا في الزمر بصفة عامة .

بعض «اللاأمثلة»

قد يكون تمرينا مفيدا أن يدرس لماذا لا تحقق بعض الحالات المرشحة لتكوين حلقة شروط الحلقة؟ نترك للقارئ أن يعرف لماذا لا تحقق المجموعات التالية (مع عمليات ثنائية واضحة) شروط الحلقة .

(أ) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة .

(ب) مجموعة الأعداد النسبية التي لا يقبل مقامها القسمة على 4 .

(ج) المجموعة الجزئية من $M_2(\mathbb{C})$ والتي تحوي المصفوفات التي تكون عناصر قطرها أصفارا .

(د) مجموعة القوة $P(X)$ لمجموعة غير خالية X، حيث يعاد تعريف الجمع كما يلي :

$$A + B = A \cup B$$

أما الضرب فنفس تعريفه سابقا .

(هـ) مجموعة المصفوفات من النوع $m \times n$ $(m > n)$ على $\mathbb{C}$.

(و) مجموعة المتجهات ذات البعد 3 مع استخدام الجداء التصالبي (cross product) كعملية ضرب .

٣ - بعض الأنواع الخاصة من الحلقات

لقد سبق أن لاحظنا من قائمة الأمثلة ، أن الحلقات التي تصادفنا في حياتنا الواقعية غالبا ما تحقق شروطا أخرى بالإضافة إلى شروط الحلقة . لهذا السبب فإنه من المفيد أن نميز هذه الأنواع الخاصة والمهمة من الحلقات ونعطيها أسماء ، ولكن قبل ذلك سنحصل على بعض النتائج الأولية المستخلصة من تعريف الحلقة والتي غالبا ما نحتاج إليها .

(١-٢) مأخوذة

إذا كانت R حلقة ، فإن

$$\text{(i)} \quad r0 = 0r = 0$$

$$\text{(ii)} \quad (-r)s = r(-s) = -(rs)$$

$$\text{(iii)} \quad (-r)(-s) = rs$$

لكل $r, s \in R$.

البرهـــان

(i) لما كان 0 هو المحايد الجمعي ، فإن $0 + 0 = 0$ وبالتالي $r(0 + 0) = r0$. باستخدام قانون التوزيع نحصل على $r0 + r0 = r0$ لذلك $r0 + r0 = r0 + 0$. حسب قانون الاختصار (الذي يصح في أية زمرة) نحصل على $r0 = 0$ ، بالمثل $0r = 0$.

(ii) نلاحظ أن $r + (-r) = 0$. وباستخدام (i) وقانون التوزيع نحصل على $(r + (-r))s = 0s = 0$ وبالتالي $rs + ((-r)s) = 0$. لكون $-(rs)$ هو المعكوس الجمعي

للعنصر rs فإن $rs + (-(rs)) = 0$. حسب قانون الاختصار في الزمر نحصل على $(-r)s$ $-(rs) =$ بالمثل نحصل على $r(-s) = -(rs)$.

(iii) باستخدام (ii) بشكل متكرر نحصل على

$$(-r)(-s) = -(r(-s)) = -(-(rs))$$

الآن لكل $t \in R$ ، يلاحظ أن $-t$ هو الحل الوحيد للمعادلة $t + x = 0$. لذلك فإن المعادلة $(-t) + (t) = 0$ تؤدي إلى أن $-(-t) = t$. وهكذا فإن $-(-(rs)) = rs$.

(١-٣) قانون التجميع العام

من المهم أن نلاحظ أن عملية الضرب في الحلقة تسمح بضرب عنصرين فقط . وإذا أردنا أن نضرب ثلاثة عناصر a, b, c على هذا الترتيب ، نحتاج أن نعيّن كيفية إجراء الضرب بإدخال أقواس مثل $a(bc)$ والذي يعني أن نحسب نتيجة ضرب bc أولا ثم نضرب الناتج بـ a من اليسار . في حالة وجود ثلاثة عناصر توجد طريقتان لإجراء عملية الضرب وهما تناظران $(ab)c$ و $a(bc)$. يخبرنا قانون التجميع بأن هاتين الطريقتين تعطيانا نفس الناتج ، لذلك نستطيع أن نهمل الأقواس . وعندما نحسب حاصل الضرب abc فإننا - ضمنا - نضع الأقواس في مكان ما ، ولكن الجواب لا يعتمد على أين توضع الأقواس ، لذلك فإن الرمز abc له معنى واحد فقط . لم يتضمن قانون التجميع ، كما تم توضيحه سابقا ، أي شيء حول حاصل الضرب $a_1 a_2 \dots a_n$ لأكثر من ثلاثة عناصر . هل الرمز $a_1 a_2 \dots a_n$ له معنى وحيد أينما وضعنا الأقواس ؟ الجواب نعم ، ويمكن استنتاجه من قانون التجميع العادي . لما كان القارئ لديه سابق خبرة ، من خلفيته من الزمر ، عن ذلك النوع من المناقشة فإننا سنترك تفاصيل إثبات ذلك . في الحقيقة ، من الصعوبة إعطاء برهان مقنع تماما ، وتكمن تلك الصعوبة في كيفية طرح السؤال بطريقة مناسبة ، لكن يستطيع القارئ بسهولة تكوين فكرة عما ينبغي عمله بتجربة وضع أقواس في حاصل ضرب أربعة عناصر وحاصل ضرب خمسة عناصر ، وملاحظة كيفية تحول هذه الأقواس إلى أخرى بواسطة التطبيق المتكرر لقانون التجميع . للحصول على وصف دقيق لذلك ، يمكن الرجوع إلى صفحة ١٨ في المرجع [Jacobson, 1951] . ملاحظات مشابهة تُطبقّ بالطبع على الجمع أو على أية عملية ثنائية تجميعية .

سنقدم الآن بعض الأنواع الخاصة من الحلقات .

الحلقات الإبدالية(commutative rings)

هي حلقات يكون الضرب فيها إبداليا ، أي أن $ab = ba$ لأي عنصرين اختيارين a, b من الحلقة .

حلقات بمحايد ضربي(rings with a multiplicative identity)

وتسمى عادة **حلقات بمحايد** ، وكما يوضح الإسم فالحلقة في هذا النوع من الحلقات تحوي عنصرا يرمز له بالرمز 1 ، بحيث إن $r1 = 1r = r$ لكل عنصر r في الحلقة . نلاحظ أن {0} تحوي عنصرا واحدا وهي حلقة بمحايد هو في هذه الحلقة طبعا 0 . يتضح أن في أية حلقة بمحايد يكون 1 وحيدا . لأنه إذا كانت R حلقة بمحايد ولها محايد ضربي آخر e ، فإن :

$$e = e1 = 1$$

الحلقات التامة (integral domains)

يعرف قاسم الصفر (zero divisor) لحلقة إبدالية R بأنه عنصر r من R بحيث إن

(i) $r \neq 0$

(ii) يوجد $s \neq 0$ في R بحيث $rs = 0$

والحلقة التامة هي حلقة إبدالية بمحايد يختلف عن الصفر وليس فيها قواسم للصفر . (في التعامل مع الحلقات غير الإبدالية نحتاج إلى أن نُميز بين القواسم اليسرى للصفر والقواسم اليمنى للصفر . سنركز في هذا الكتاب على الحلقات الإبدالية فقط ، وسنتجنب الخوض في هذه الاعتبارات) . الحقيقة التالية مهمة في الحلقات التامة .

(١-٤) مأخوذة

إذا كانت R حلقة تامة وكان a عنصرا غير صفري في R وكان x, y عنصرين من R ، فإن :