جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الثالثة

مقرر : جبر الحلقات

المحاضرة الاولى (2)

(المصدر)

الحلقات ، الحلقيات والجبر الخطي

ب. هارتلي / جامعة مانشستر

ب.هاوكس / جامعة وارك

ترجمة : يوسف عبدالله و احمد حميد

قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة الملك سعود

$$ax = ay \Rightarrow x = y$$

يسمى هذا بقانون الاختصار للضرب .

البرهان

إذا كان $ax = ay$ ، فإنه من شروط الحلقة نحصل على $a(x - y) = 0$. لما كان a ليس قاسما للصفر ، فإن $x - y = 0$ وبالتالي $x = y$.

الحقول (fields)

الحقل حلقة إبدالية تكوّن مجموعة عناصرها غير الصفرية زمرة بالنسبة لعملية الضرب . لذلك إذا كان K حقلا ، فإن K يحتوي عنصرا $1 \neq 0$ بحيث إن $1x = x$ لكل عنصر غير صفري x في K . لما كان $1.0 = 0$ (حسب المأخوذة ١-٢) ، فإن 1 هو المحايد الضربي ، وبالإضافة إلى ذلك فإنه لكل عنصر غير صفري a في K يوجد عنصر a^{-1} في K بحيث إن $a\,a^{-1} = 1$. يمكن بسهولة إثبات أن الحقل لا يحوي قواسم للصفر ، لأنه إذا كان a عنصرا غير صفري في K وكان $ax = 0$ فإن :

$$x = 1x = a^{-1}\,ax = a^{-1}\,0 = 0$$

وعليه لدينا العلاقات التالية بين الأنواع الأربعة من الحلقات التي سبق ذكرها :

حقل ← حلقة تامة ← حلقة إبدالية

حلقة تامة ← حلقة بمحايد

لكي يستطيع القارئ أن يلقي بعض الضوء على هذه التعاريف ، فإنه يحتاج إلى القيام بالمهمتين التاليتين : الأولى أن يدرس إلى أي نوع تنتمي أمثلة الحلقات ١ - ١٠ ، والثانية إعطاء أمثلة توضح أنه لا يوجد اثنان من الفصول السابقة متساويان .

الحلقات الجزئية، التشاكلات والمثاليات

عندما نقابل نوعا جديدا من البنى الرياضية، فإن أول ما نحاول دراسته كالعادة هو البنى الجزئية لها وكذلك «الاقترانات (morphisms)»، أي التطبيقات التي تحافظ على البنية للبنى الرياضية المطلوب دراستها، وهذا هو الهدف من هذا الفصل.

١ - الحلقات الجزئية

(٢-١) تعريف

الحلقة الجزئية (subring) *من حلقة R هي مجموعة جزئية S من R تشكل حلقة تحت تأثير نفس العمليات التي ورثتها من R.*

ماذا يعني التعريف المذكور أعلاه؟ يعني أولا، أن العمليات على R تحدد العمليات على S. في حالة الجمع، على سبيل المثال، إن قيد التطبيق $R \times R \to R$ المعرف بـ $(a, b) \to a + b$ على $S \times S$ يجب أن يعطي تطبيقا من $S \times S$ إلى S؛ أي أنه إذا كان a, b عنصرين من S فإن $a + b$ يجب أن ينتمي إلى S. بالمثل $-a$ و ab ينتميان إلى S. وعليه فإن $a-b = a + (-b)$ ينتمي إلى S. ونشير إلى نقطة أخرى قد تغيب عن البال، وهي أنه لما كانت S تشكل بالنسبة لعملية الجمع زمرة فإنها يجب أن تكون غير خالية. لذلك نكون قد أثبتنا نصف المأخوذة التالية.

(٢-٢) مأخوذة

إذا كانت S مجموعة جزئية من حلقة R فإن S تكون حلقة جزئية من R إذا، وفقط إذا كان

(i) S غير خالية

(ii) طالما كان $a, b \in S$ فإن $ab, a-b \in S$

البرهـــان

لقد أثبتنا أن الشروط السابقة ضرورية . سنثبت الآن أنها كافية . لما كانت S غير خالية، فإنها تحوي عنصرا وليكن a وبالتالي فإن $0 = a - a$ ينتمي إلى S . وعليه فإن $0 - b = -b$ ينتمي إلى S وبالتالي $a + b = a - (-b) \in S$. لذلك فإن العمليتين الثنائيتين والعملية الأحادية على R تولد عمليات مناظرة على S . كما يلاحظ أن قانوني الإبدال والتجميع صحيحان بالنسبة لعملية الجمع على S بالوراثة من R؛ لأنه إذا جمعنا عناصر من S، فيمكن النظر إليها كعناصر من R. وإذن S زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الجمع والمحايد الجمعي هو 0 . يلاحظ أن قانون التجميع صحيح بالنسبة لعملية الضرب، وأن قانوني التوزيع صحيحان على S بالوراثة من R، وإذن S حلقة .

أمثلة

١ - يلاحظ أن كلا من $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ تشكل مع العمليات الاعتيادية حلقة جزئية من التي تليها .

٢- يلاحظ أن حلقة المرباعيات والتي سبق أن نوقشت في مثال حلقة (٩) تشكل حلقة جزئية من $M_2(\mathbb{C})$.

٣ - تشكل مجموعة كل المصفوفات من النوع $n \times n$ على الحقل K والتي تكون جميع عناصرها تحت القطر أصفارا، حلقة جزئية من $M_n(K)$.

سنحتاج الآن أن نقدم قدرا معينا من الرموز المفيدة، البعض منها مألوف والبعض الآخر قد لا يكون مألوفا .

ترميز

١ - عندما نتعامل مع الحلقة R، من المفيد غالبا أن نفكر في R كزمرة تحت تأثير البنية الجمعية التي تملكها متجاهلين بنية الضرب . عندما نركز على ذلك سنكتب R^+ بدلا من R، وتسمى R^+ الزمرة الجمعية (additive group) للحلقة R. نلاحظ أن R ترمز إلى نظام يحوي مجموعة وعمليتين ثنائيتين وعملية أحادية على هذه المجموعة وعنصرا مختارا من المجموعة، بينما ترمز R^+ إلى نفس النظام مع حذف عملية الضرب. غالبا ما تسمى الزمر الجزئية من R^+ بزمر جمعية جزئية (additive subgroups) من R. وعلى ذلك فإن الزمرة الجزئية الجمعية من R هي مجموعة جزئية S من R تحتوي على 0 وتحقق الشرط أنه إذا كان $a , b \in S$ فإن $a - b \in S$.

٢ - إذا كانت A زمرة إبدالية جمعية، وكان $a \in A$، وكان n عددا صحيحا فإن na يعرف كما يلي :

إذا كان $n > 0$ $\qquad na = a + ... + a$ (n من المرات)

$$0a = 0$$

إذا كان $n < 0$ $\qquad na = (-n)(-a) = -(a + . . . + a) = -(|n|\, a)$

إذا كان $a, b \in A$ وكان n, m عددين صحيحين فإن :

$$n(a + b) = na + nb$$

$$(n + m)\, a = na + ma$$

$$(nm)\, a = n(ma)$$

$$1a = a$$

نود أن نشير إلى أنه قد تكون الحقائق البسيطة المذكورة آنفا مألوفة لدى القارئ وإذا رغب الاطلاع على إثباتها، فعليه الرجوع إلى أي كتاب في مبادئ نظرية الزمر.

نستطيع، بصفة خاصة، أن نعتبر A هي الزمرة الجمعية R^+ لأي حلقة R، ولذلك فإن التعاريف المذكورة أعلاه صحيحة في أي حلقة R . ومن الضروري التفريق بين العملية $(n, a) \to na$ والضرب في الحلقة؛ لأنه لا يمكن اعتبار n عنصرا من R بصفة عامة.

من ناحية ثانية، يمكن أن يحدث في بعض الأحيان أن تتطابق $\mathbb{Z}$ مع حلقة جزئية من R إلى الحد الذي يجعل العدد الصحيح 1 يؤدي دور المحايد الضربي في R . في هذه الحالة، إذا كان $n > 0$، فإنه باستخدام قانون التوزيع :

$$na = (1 + ... + 1)\, a = a + ... + a$$

لذلك فإنه في هذه الحالة يكون للرمز na نفس المعنى إذا اعتبرناه حاصل ضرب عناصر أو اعتبرناه حسب التعريف السابق . وبنفس الطريقة يمكن اعتبار $(-n)\, a, 0a$. وهكذا فإنه لا يوجد احتمال حدوث أي لُبْس .

إذا كان a عنصرا من حلقة R وكان n عددا صحيحا موجبا فإن

$a^n = a...a$ (n من المرات) .

أيضا، إذا كان $n, m > 0$ فإنه يلاحظ أن :

$$a^{n+m} = a^n \,.\, a^m \quad , \quad a^{nm} = (a^n)^m$$

إذا كانت R حلقة بمحايد فإننا نعرف $a^0 = 1$ حيث $0 \neq a \in R$، كما أن المتطابقات المشار إليها تبقى صحيحة .

٣ - نفرض أن T و S مجموعتان جزئيتان غير خاليتين واختياريتان من حلقة R. نعرف :

$$S + T = \{s + t : s \in S\,,\, t \in T\}$$

$$ST = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i\, t_i : s_i \in S, t_i \in T, n = 1, 2, ... \right\}$$

لنركز بشكل خاص علي الحالة التي تكون فيها كل من S, T زمرة جمعية جزئية من R، وقد عرف المجموع والجداء لزمرتين جمعيتين جزئيتين بهذه الطريقة حتى يكون كل منهما زمرة جمعية جزئية .

(٢-٣) مأخوذة

إذا كانت R حلقة، وكانت U، T و S مجموعات جزئية غير خالية من R، فإن :

(i) $(S + T) + U = S + (T + U)$ ، $(ST)U = S(TU)$

(ii) *إذا كانت T و S زمرتين جزئيتين جمعيتين من R فإن كلا من $S + T$ و ST تكون كذلك .*

(iii) *إذا كانت T و S حلقتين جزئيتين من R، وكانت R إبدالية، فإن ST حلقة جزئية من R.*

البرهـــــان

(i) من الواضح أن $(S+T)+U = S+(T+U)$. لما كانت ST تحوي كل المجاميع المنتهية من العناصر التي على الشكل st، حيث $t \in T$ و $s \in S$، فإن ST مغلقة بالنسبة للجمع، وهكذا فإن $(ST)U$ و $S(TU)$ مغلقتان أيضا بالنسبة للجمع . إذا كان z عنصرا اختياريا من $(ST)U$ فإن z هو مجموع منته لعناصر على الشكل xu حيث $u \in U$ و $x \in ST$. لذلك فإن x مجموع منته من عناصر على الشكل st حيث $t \in T$، $s \in S$، وبالتالي فإن z هو مجموع عناصر على الشكل $(st)u$. لما كان $(st)u = s(tu)$، فإن هذه العناصر جميعها تنتمي إلى $S(TU)$. لكن $S(TU)$ مغلقة بالنسبة للجمع لذلك فإن $z \in S(TU)$. وإذن $(ST)U \subseteq S(TU)$. والعكس يمكن إثباته بطريقة مماثلة .

(ii) إذا كان $x, x' \in S+T$. فإن $x' = s'+t'$ و $x = s+t$ حيث $t, t' \in T$ و $s, s' \in S$. لذلك $x - x' = (s-s') + (t-t') \in S+T$ لأن S, T زمرتان جمعيتان . علاوة على ذلك فإن 0 ينتمي إلى S وينتمي إلى T، وبالتالي $0 = 0+0 \in S+T$ وإذن $S+T$ زمرة جمعية جزئية من R .

نعتبر الآن ST . لقد لاحظنا أنها مغلقة بالنسبة للجمع . بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $y = \Sigma s_i t_i \in ST$ فإن $-y = \Sigma(-s_i)\, t_i \in ST$ لأن $-s_i \in S$. لما كان من الواضح أن ST تحوي 0، فإنها تشكل زمرة جمعية جزئية من R .

(iii) لقد سبق ملاحظة أن ST زمرة جمعية جزئية من R . لذلك يكفي أن نثبت أن ST مغلقة بالنسبة للضرب . حاصل الضرب :

$$\left(\sum_i s_i\, t_i\right)\left(\sum_j s'_j\, t'_j\right) = \sum_{i,\, j}\left(s_i\, s'_j\right)\left(t_i\, t'_j\right)$$

لأن R إبدالية، وبالتالي فإن حاصل الضرب هذا عنصر من عناصر ST .

٢ – التشاكلات (homomorphisms)

(٢–٤) تعريف

يقال عن التطبيق $\phi : R \to S$ من الحلقة R إلى الحلقة S إنه تشاكل إذا حقق الشرطين التاليين :

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \qquad (١)$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\ \phi(y) \qquad (٢)$$

لكل $x, y \in R$.

يلاحظ من المعادلة (١) أن ϕ يمثل بصفة خاصة تشاكل زمر من R^+ إلى S^+ وباستخدام خواص تشاكل الزمر نحصل على :

$$\phi(0_R) = 0_s\ ,\ \phi(-r) = -\phi(r)$$

لكل $r \in R$، حيث 0_R هو صفر الحلقة R .

لقد جرت العادة في كتب الرياضيات المؤلفة باللغة الإنجليزية أن تُصدَّر كلمة "morphism" ببوادئ مختلفة للتمييز بين أنواع مهمة ومختلفة من التشاكلات . إذا كانت R, S حلقتين، فإننا :

(ا) نسمي التشاكل $R \to S$ تماثلا (isomorphism) إذا كان متباينا وغامرا، أي إذا كان تقابلا .

(ب) نسمي التشاكل من الحلقة R إلى نفسها بالتشاكل الداخلي (endomorphism) .

(جـ) نسمي التماثل من الحلقة إلى نفسها بالتماثل الذاتي (automorphism) .

كما يمكن التحقق بسهولة من أن تركيب تشاكلين تشاكل وأيضا تركيب تشاكلين متباينين تشاكل متباين (monomorphism)، وهكذا في حالة تركيب تشاكلين غامرين تشاكل غامر (epimorphism) وكذلك تركيب تماثلين تماثل . ويمكن الحصول على هذه النتائج بشكل مباشر من كون تركيب تطبيقين متباينين أو غامرين يكون متباينا أو غامرا على التوالي . بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $\phi : R \to S$ تماثل حلقات، فإن معكوس التطبيق ϕ، أي $\phi^{-1} : S \to R$ (الذي يوجد لأن ϕ تقابل (bijection)) يكون تماثلا . لأنه إذا كان s' و s عنصرين من S فإنه يوجد عنصران r' و r في R بحيث إن $s' = \phi(r')$ و $s = \phi(r)$، وبالتالي فإن

$$\phi^{-1}(ss') = \phi^{-1}(\phi(r)\ \phi(r')) = \phi^{-1}(\phi(rr')) = rr' = \phi^{-1}(s)\ \phi^{-1}(s')$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\phi^{-1}(s + s') = \phi^{-1}(s) + \phi^{-1}(s')$$

إذا كان يوجد تماثل من R إلى S فإننا نكتب $R \cong S$ ونقول إن R تماثل (حلقاتيا) S . وإن الرمز "$\cong$" له خواص علاقة التكافؤ ، أي

$$R \cong R \qquad \text{(i)}$$

$$R \cong S \Rightarrow S \cong R \qquad \text{(ii)}$$

$$R \cong S,\ \ S \cong T \Rightarrow R \cong T \qquad \text{(iii)}$$

وهذه نتائج لما ذكر أعلاه . بشكل تقريبي تكون حلقتان متماثلتين إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإعادة تسمية العناصر فقط وإبقاء جدولي الجمع والضرب دون تعديل ، لذلك فإن الحلقات المتماثلة لها نفس الخواص الجبرية . إن مفهوم التماثل يسمح لنا الآن أن نضبط بعض الملاحظات الغامضة بالفصل الأول . إن كلا من المجموعات الجزئية :

$$\{a\mathbf{l} + b\mathbf{j}\} \text{ ، } \{a\mathbf{l} + b\mathbf{i}\} \ \ldots \text{ الخ}$$

هي حلقة جزئية من حلقة المرباعيات المشار إليها في مثال حلقة (٩) وإن كلا منها يماثل (حلقة) الأعداد المركبة .

لقد سبق أن أشرنا إلى أن أي تشاكل من حلقة R إلى حلقة S يمكن التفكير فيه بصفة خاصة كتشاكل من R^+ إلى S^+ ، ونستطيع الحصول على بعض المعلومات عن هذا التشاكل بهذه الوسيلة . كمثال على ذلك ، فإن $\phi(R)$ صورة R(image) ، ويرمز لها بالرمز $\text{im}\phi$ ، هي زمرة جزئية من S^+ . كذلك باعتبار ϕ تشاكل زمر ، فإن له نواة (kernel) ، وهي :

$$\{x \in R : \phi(x) = 0_s\}$$

والتي غالبا ما سيرمز لها بالرمز $\ker\phi$. نحن نعلم من مبادئ نظرية الزمر أن $\ker\phi$ زمرة جزئية ناظمية (normal subgroup) من R^+ (بالرغم من أن استخدام كلمة «ناظمية» غير ضروري في هذه الحالة لكون R^+ زمرة إبدالية ، وبالتالي أي زمرة جزئية تكون ناظمية) . باستخدام البنية الضربية نستطيع الحصول على معلومات أكثر عن $\ker\phi$ وعن $\text{im}\phi$. وبصفة خاصة ، إذا كان x أي عنصر من R وكان $k \in \ker\phi$ ، فإن :

$$\phi(xk) = \phi(x)\,\phi(k) = \phi(x)\,0_s = 0_s$$

إذن $xk \in \ker\phi$، وبالمثل يمكن إثبات أن $kx \in \ker\phi$.

(٢-٥) تعريف

يقال عن مجموعة جزئية K من حلقة R إنها مثالي (ideal) *في R إذا كانت K زمرة جمعية جزئية من R وكان $xk, kx \in K$ لكل $x \in R$, $k \in K$.*

ويمكن إعادة صياغة التعريف بطرق متعددة متكافئة . فحسب الترميز المشار إليه سابقا إن المثالي في الحلقة R هو زمرة جزئية جمعية K من R تحقق الشرط $KR \cup RK \subseteq K$.

وعلى نحو أكثر وضوحا إن K مثالي في R إذا وفقط إذا كان :

(i) $0 \in K$

(ii) $k, k' \in K \Rightarrow k - k' \in K$

(iii) $k \in K,\ x \in R \Rightarrow kx, xk \in K$

سنكتب $K \lhd R$ إذا كان K مثاليا في الحلقة R. سنواجه أمثلة عن المثاليات في أثناء دراستنا ونشير إلى أن كلا من $\{0\}$ و R يشكل دائما مثاليا في الحلقة R.

(٢-٦) مأخوذة

نفرض أن R و S حلقتان وأن $\phi : R \to S$ تشاكل . عندئذ :

(i) $\ker\phi \lhd R$ ، *ويكون ϕ تشاكلا متباينا إذا وفقط إذا كان* $\ker\phi = \{0\}$

(ii) $\mathrm{im}\phi$ *تشكل حلقة جزئية من S .*

البرهـــــان

(i) لقد سبق أن أثبتنا أن $\ker\phi \lhd R$.

نفرض الآن أن ϕ تشاكل متباين وأن $x \in \ker\phi$، إذن $\phi(x) = 0_s = \phi(0_R)$، وعليه فإن $x = 0_R$ وبالتالي $\ker\phi = \{0_R\}$. وبالعكس ، إذا كانت $\ker\phi = \{0_R\}$ وكان $x, y \in R$ وكان $\phi(x) = \phi(y)$، فإن $0_S = \phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y)$. إذن $x - y \in \ker\phi$، وعليه فإن $x - y = 0_R$ وبالتالي $x = y$. إذن ϕ تشاكل متباين في هذه الحالة .

(ii) سبق أن رأينا أن $\mathrm{im}\phi$ زمرة جمعية جزئية من R وبقي أن نثبت أنه إذا كان $s, s' \in \mathrm{im}\phi$ فإن $ss' \in \mathrm{im}\phi$. حسب تعريف $\mathrm{im}\phi$ يوجد $r, r' \in R$ بحيث إن $s = \phi(r)$ و $s' = \phi(r')$، إذن :

$$ss' = \phi(r)\,\phi(r') = \phi(rr') \in \mathrm{im}\phi$$

بعد أن لاحظنا أن كل نواة هي مثالي، يحق لنا أن نتساءل هل كان مثالي نواة؟ أي هل كل مثالي في حلقة R هو نواة لتشاكل من R لحلقة أخرى؟ للإجابة عن هذا السؤال من المفيد أيضا أن ننظر إلى الزمرة الجمعية R^+ .

لنتذكر حالة الزمر الإبدالية . إذا كانت A زمرة إبدالية، وكانت B زمرة جزئية من A، فإن مجموعة مشاركة لـ B في A هي فصل تكافؤ لعلاقة التكافؤ ~ المعرفة على A كما يلي :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in B$$

لما كانت A زمرة إبدالية، فإن B ناظمية في A، وبالتالي فإن الاختلاف بين المجموعات المشاركة اليمنى والمجموعات المشاركة اليسرى يختفي . إذا كان x عنصرا من مجموعة مشاركة ما، فإن عناصر هذه المجموعة المشاركة هي $b + x$ حيث يمر b على كل عناصر B، ويرمز لهذه المجموعة المشاركة بـ $B + x$. يرمز لمجموعة كل المجموعات المشاركة لـ B في A بالرمز A/B. إذاعرفنا على A/B العمليتين التاليتين :

$$(B + x) + (B + y) = B + (x + y)$$

$$-(B + x) = B + (-x)$$

فإن هاتين العمليتين حسنتا التعريف، أي أن الطرف الأيمن من أي من المعادلتين أعلاه يعتمد على المجموعتين المشاركتين بالطرف الأيسر ولا يعتمد على العنصرين المختارين x, y لتمثيلهما . تجعل العمليتان A/B زمرة إبدالية، وتكون المجموعة المشاركة B العنصر الصفري لها . التطبيق $\upsilon : x \to B + x$ تشاكل زمر غامر نواته B، ويسمى υ التشاكل الطبيعي (natural homomorphism) من A إلى A/B.

لنرجع إلى حالة الحلقة . لقد قطعنا مرحلة لنجد تشاكلا من الحلقة R بحيث يكون المثالي المعطى K نواة له . سنفكر في الحلقة كزمرة جمعية ونعتبر مجموعة كل المجموعات المشاركة R/K والتي يمكن النظر إليها كزمرة جمعية، ثم نحصل على تشاكل

زمر $\upsilon : R \to R/K$ كما هو أعلاه . نحن نرغب أن يكون υ تشاكل حلقات، ولكن العقبة الرئيسة هي أن R/K ليست حلقة حتى الآن . هل يمكن جعل R/K حلقة حتى نجعل υ تشاكل حلقات؟ يجبرنا الشرط $\upsilon(x)\ \upsilon(y) = \upsilon(xy)$ على تعريف الضرب في R/K كما يلي :

$$(K + x)(K + y) = K + xy$$

يجب التأكد أولا من أن التعريف يعطي عملية ثنائية على R/K؛ أي أن المجموعة المشاركة التي على اليمين تعتمد فقط على المجموعتين المشاركتين اللتين على اليسار ولا تعتمد على العنصرين المختارين لتمثليهما . إذا كان $K + x = K + x'$، وكان $K + y = K + y'$، فإن $x = x' + k$ و $y = y' + l$ حيث $k, l \in K$. وبالتالي فإن :

$$xy = x'y' + (ky' + x'l + kl)$$

لما كان K مثاليا في الحلقة R وحيث إن $k, l \in K$، فإن العنصر المحصور بين قوسين ينتمي إلى K. لذلك :

$$K + xy = K + x'y'$$

وبالتالي فإن التعريف السابق يعطي فعلا عملية ثنائية على R/K. نلاحظ أن كون K مثاليا في الحلقة R هو الذي جعل ذلك ممكنا .

يستطيع القارئ التأكد بسهولة من أن R/K تحقق شروط الحلقة وأن υ حقيقة تشاكل حلقات، وهكذا نكون قد حصلنا على المأخوذة التالية :

(٢-٧) مأخوذة

إذا كان K مثاليا في الحلقة R وكانت R/K هي مجموعة كل المجموعات المشاركة لـ K في R، فإن التعاريف التالية :

$$(K + x) + (K + y) = K + (x + y)$$

$$-(K + x) = K + (-x)$$

$$(K + x)(K + y) = K + xy$$

تجعل R/K حلقة، كما أن التطبيق الطبيعي $\upsilon : x \to K + x$ هو تشاكل غامر نواته K.

تسمى R/K حلقة القسمة (quotient ring) أو حلقة فصول الرواسب (residue class ring) لـ R بالنسبة إلى K، كما يسمى υ التشاكل الطبيعي (natural homomorphism) من R إلى R/K. يلاحظ أن

$$(R/K)^+ = R^+/K$$

إن الصفة الرئيسة للتشاكل الطبيعي من الحلقة R إلى حلقة قسمة R/J معطاة بالمبرهنة التالية.

(٢-٨) مبرهنة

نفرض أن $J \lhd R$ وأن $\upsilon : R \to R/J$ هو التشاكل الطبيعي. نفرض أن $\phi : R \to S$ تشاكل حلقات بحيث إن نواته تحوي J. إنه يوجد تشاكل وحيد $\psi : R/J \to S$ يجعل الرسم التخطيطي التالي إبداليا.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\upsilon"'] & & S \\ & R/J \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

كما أن $ker\psi = ker\phi/J$.

(عندما يقال إن الرسم التخطيطي أعلاه إبدالي فإن ذلك يعني أنه يتم الحصول على نفس النتيجة بالذهاب من R إلى S باستخدام أي من الطريقين الممكنين - مباشرة أو عن طريق R/J. وبكلمات أخرى $\phi = \psi\upsilon$).

البرهـــان

إذا كان الرسم التخطيطي إبداليا، فإن

$$\psi(J + x) = \psi\upsilon(x) = \phi(x) \qquad (*)$$

لكل $J + x \in R/J$، وعليه توجد طريقة واحدة ممكنة لتعريف ψ، وإذن يجب أن نتأكد من أن تعريف $\psi(J + x)$ بأنه $\phi(x)$ يفي بالغرض. أولا يعتمد التعريف على المجموعة المشاركة $J + x$ فقط وليس على الممثل x. لأنه إذا كان $J + x = J + x'$، فإن $x - x' \in J$، وحسب الفرض فإن هذا يعني أن $x - x' \in \ker\phi$، وبالتالي فإن $\phi(x - x') = 0$ ويؤدي

هذا إلى $\phi(x) = \phi(x')$. لذلك فإن تعريف ψ المذكور في (*) يعرف تطبيقا $\psi : R/J \to S$. إذا كان $J + y$ عنصرا آخر من R/J، فإن :

$$\psi((J + x) + (J + y)) = \psi(J + (x + y)) = \phi(x + y)$$
$$= \phi(x) + \phi(y) = \psi(J + x) + \psi(J + y)$$

لذلك فإن ψ يحافظ على الجمع . نستطيع بالمثل إثبات أن ψ يحافظ على الضرب . وإذن ψ تشاكل حلقات .

أخيرا من (*) يلاحظ أن :

$$\psi(J + x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker\phi$$

وإذن $\ker\psi = \ker\phi/J$.

تسمى المبرهنات الثلاث التالية عادة بمبرهنات التماثل الأولى، الثانية والثالثة حسب الترتيب وهي مبرهنات تنتج بسهولة من مبرهنة (٢-٨) .

(٢-٩) مبرهنة

إذا كان $\phi : R \to S$ تشاكل حلقات، فإن

$$R/\ker\phi \cong \mathrm{im}\phi$$

البرهـــان

لنعتبر $J = \ker\phi$ في المبرهنة (٢-٨) . هذا يعطي التشاكل $\mu : R/\ker\phi \to S$ الذي يجعل الرسم التخطيطي التالي إبداليا ونواته

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\upsilon"'] & & S \\ & R/\ker\phi \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

هي $\ker\phi/\ker\phi$ الحلقة الجزئية الصفرية من $R/\ker\phi$. لذلك حسب المأخوذة (٢-٦) μ تشاكل متباين . كما ينتج من العلاقة $\phi = \mu\upsilon$ أن $\mathrm{im}\mu = \mathrm{im}\phi$. وإذن μ يشكل تماثلا من $R/\ker\phi$ إلى $\mathrm{im}\phi$.