جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الثالثة

مقرر : جبر الحلقات

المحاضرة الاولى (3)

(المصدر)

الحلقات ، الحلقيات والجبر الخطي

ب. هارتلي / جامعة مانشستر

ب.هاوكس / جامعة وارك

ترجمة : يوسف عبدالله و احمد حميد

قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة الملك سعود

(٢-١١) مبرهنة

إذا كانت R حلقة وكان J, K مثاليين في الحلقة R بحيث إن $J \subseteq R$ ، فإن $K/J \lhd R/J$ وكذلك:

$$(R/J)/(K/J) \cong R/K$$

البرهـــان

لنستخدم (٢-٨) معتبرين ϕ التشاكل الطبيعي من R إلى R/K. عندئذ $\ker\phi = K$ ونحصل على تشاكل ψ حيث إن الرسم التخطيطي التالي تبادلي

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\upsilon"'] & & R/K \\ & R/J \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

كذلك $\ker\psi = K/J$. من الواضح أن ψ غامر ، وهكذا باستخدام المبرهنة الأولى في التماثل ، نحصل على النتيجة المطلوبة .

توجد «مبرهنة تماثل» أخرى تختص بالعلاقة بين المثاليات في $\mathrm{im}\phi$ ، والحلقات الجزئية في $\mathrm{im}\phi$ ، . . . إلخ (حيث ϕ تشاكل من حلقة R) من جهة والأشياء المناظرة لها في R من جهة ثانية . نحتاج أن نتذكر بعض المعلومات في نظرية المجموعات قبل أن نذكر هذه المبرهنة .

نفرض أن X'', Y'' مجموعتان وأن $f : X'' \to Y''$ تطبيق وكذلك نفرض أن X, Y مجموعتان جزئيتان من X'', Y'' على التوالي .

نعرف

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X'' : f(x) \in Y\}$$

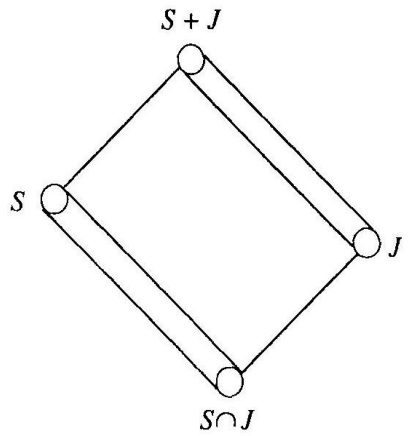
تسمى المجموعتان $f(X)$ و $f^{-1}(Y)$ صورة X(image)، *والصورة العكسية* (*inverse image*) لـY على التوالي . نحصل بهذه الطريقة على تطبيق من المجموعة $\mathscr{P}(X'')$ (مجموعة المجموعات الجزئية لـX'') إلى المجموعة $\mathscr{P}(Y'')$. لا زال هذا التطبيق يحمل الرمز f، بالرغم من أنه من المفروض أن يعطى رمزا مختلفا . بالمثل يوجد تطبيق $f^{-1} : \mathscr{P}(Y'') \to \mathscr{P}(X'')$. يمكن التحقق بسهولة من صحة النتائج التالية :

(i) إذا كانت $Y \subseteq \mathrm{im}f$ ، فإن $Y = f(f^{-1}(Y))$

(٢-١٠) مبرهنة

إذا كانت R حلقة، $J \lhd R$ و S حلقة جزئية من R فإن $S + J$ حلقة جزئية من R، $J \lhd S + J$، $S \cap J \lhd S$ و $S + J/J \cong S/S \cap J$.

قد يساعد الرسم التخطيطي التالي على تصور ما تشير إليه هذه النتيجة .



العلاقة «مثالي في» يعبر عنها بخطين مزدوجين والمبرهنة تنص على أن حلقتي القسمة (المناظرتين للضلعين المزدوجين المتقابلين) متماثلتان . لهذا السبب تسمى هذه المبرهنة أحيانا بقانون متوازي الأضلاع .

البرهـــان

نعلم من (٢-٣) أن $S + J$ زمرة جمعية جزئية من R. نفرض أن $s, s' \in S$ وأن $j, j' \in J$. لما كان J مثاليا في الحلقة R، فإن:

$$(s + j)(s' + j') = ss' + (js' + sj' + jj') \in S + J$$

من الواضح أن $J \lhd S + J$. نفرض أن $\upsilon : R \to R/J$ التشاكل الطبيعي وأن υ' اقتصار υ على S، فيكون υ' تشاكلا من S إلى R/J. تحوي صورة υ' كل المجموعات المشاركة $s + J$ حيث $s \in S$؛ أي أن $\mathrm{im}\upsilon' = S + J/J$. تحوي نواة υ كل العناصر في S التي يرسلها υ إلى الصفر؛ أي أن $\ker\upsilon' = S \cap J$. لذلك $S \cap J \lhd J$ حسب (٢-٦) وكذلك $S + J/J \cong S/S \cap J$ حسب (٢-٩) .

(ii) إذا كانت X, X' مجموعتين جزئيتين من X'' وكانت Y, Y' مجموعتين جزئيتين من Y''، فإن:

$$X \subseteq X' \Rightarrow f(X) \subseteq f(X'), Y \subseteq Y' \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$$

نستطيع الآن أن نتطرق إلى المبرهنة الأخيرة في التماثل وهي كما يلي.

(٢-١٢) مبرهنة

نفرض أن R, S حلقتان، ونفرض أن $\phi : R \to S$ تشاكل نواته K. يشيِّد التطبيقان ϕ و ϕ^{-1} المذكوران آنفا تقابلا يحافظ على الاحتواء بين مجموعة الحلقات الجزئية من $\mathrm{im}\phi$ ومجموعة الحلقات الجزئية من R التي تحوي K. في هذا التقابل المثاليات تناظر المثاليات.

البرهـــان

نفرض أن $T = \mathrm{im}\phi$، وأن U حلقة جزئية من T. نود أن نُثبت أن $\phi^{-1}(U)$ حلقة جزئية من R تحوي K. نلاحظ أن $0 \in U$ ولذلك $\phi^{-1}(U) \geq \phi^{-1}(\{0\}) = \mathrm{K}$ (حسب (ii)). نفرض أن $r, r' \in \phi^{-1}(U)$ وبالتالي فإن $\phi(r), \phi(r') \in U$ وهكذا فإن $\phi(r + r') = \phi(r) + \phi(r') \in U$ لأن U حلقة جزئية. ويؤدي هذا إلى أن $r + r' \in \phi^{-1}(U)$. وبالمثل يمكن إثبات أن $-r$ و rr' ينتميان إلى $\phi^{-1}(U)$، وهكذا فإن $\phi^{-1}(U)$ حلقة جزئية من R. باستخدام (i) نستنتج أن $U = \phi(\phi^{-1}(U))$.

نفرض أن V حلقة جزئية من R تحوي K. سنثبت أن $\phi(V)$ حلقة جزئية من T، وأن $V = \phi^{-1}\ \phi(V)$. ونكون بذلك قد أثبتنا أن التناظر الذي عمل بواسطة ϕ و ϕ^{-1} بين الحلقات الجزئية لـ $T = \mathrm{im}\phi$ والحلقات الجزئية لـ R التي تحوي K، هو تقابل. نلاحظ أن $\phi(V)$ صورة تشاكل معين لـ V وهو اقتصار ϕ على V؛ لذلك فإن $\phi(V)$ هي حلقة جزئية من T حسب مأخوذة (٢-٦). نفرض أن $r \in \phi^{-1}(\phi(V))$. هذا يعني أن $\phi(r) \in \phi(V)$، وبالتالي $\phi(r) = \phi(v)$ حيث $v \in V$. إذن $\phi(r - v) = 0$ وبالتالي $r - v \in K$؛ أي أن $r = v + k$ حيث $k \in K$. ولكن $K \subseteq V$ حسب الفرض، إذن $r \in V$ و $k \in V$ وهذا يؤدي إلى أن $\phi^{-1}(\phi(V)) \subseteq V$. الاحتواء العكسي واضح، إذن $V = \phi^{-1}(\phi(V))$.

نلاحظ أن الحقيقة التي تشير إلى أن التقابل يحافظ على الاحتواء هي بالضبط الشرط (ii) المذكور آنفا. نترك للقارئ أن يتأكد من أن المثاليات تقابل المثاليات.

من المفيد أن نشير إلى خواص التناظر المذكور سابقا حينما يكون ϕ هو التشاكل الطبيعي υ من الحلقة R إلى حلقة القسمة R/K. في هذه الحالة، كل حلقة جزئية من $\operatorname{im}\upsilon = R/K$ مجموعة معينة من مجموعات مشاركة لـ K و υ^{-1} تُنشئ اتحاد هذه المجموعات المشاركة. ومن ناحية أخرى، كل حلقة جزئية من R تحوي K، هي اتحاد مجموعات مشاركة لـ K وتستبدلها υ بمجموعة هذه المجموعات المشاركة. وكل حلقة جزئية من R/K صورة تحت تأثير υ لحلقة جزئية V من R تحوي K، ولذلك هي على الصورة V/K. بالمثل، مثاليات الحلقة R/K نحصل عليها من مثاليات V للحلقة R والتي تحوي K.

٣- بعض خواص الحلقات الجزئية والمثاليات

(٢-١٣) مأخوذة

(i) *نفرض أن* $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *أية مجموعة حلقات جزئية (مثاليات على التوالي) في حلقة* R، *فتكون* $T = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ *حلقة جزئية (مثاليا على التوالي) في الحلقة* R.

(ii) نفرض أن

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$$

سلسلة تصاعدية (ascending chain) من حلقات جزئية (مثاليات على التوالي) في الحلقة R، *فتكون* $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ *حلقة جزئية (مثاليا على التوالي) في الحلقة* R.

البرهـــان

(i) لما كان $0 \in S_\lambda$ لكل $\lambda \in \Lambda$، فإن $0 \in T$، لذلك فإن T مجموعة غير خالية. نفرض أن $a, b \in T$، فيكون $a, b \in S_\lambda$ لكل $\lambda \in \Lambda$. وإذن $a-b, ab \in S_\lambda$ لكل $\lambda \in \Lambda$، وبالتالي $a-b, ab \in T$، وعليه فإن T تشكل حلقة جزئية. نلاحظ بالإضافة إلى ذلك، أنه إذا كان كل S_λ مثاليا في الحلقة R وكان $x \in R$،

فإن xa و ax ينتميان إلى كل S_λ وبالتالي ينتميان إلى T . إذن تشكل T في هذه الحالة مثاليا في الحلقة R.

(ii) من الواضح أن $0 \in S$. نفرض أن $a, b \in S$ فيكون $a \in S_i$, $b \in S_j$ لرقمين i, j . إحدى الحلقتين الجزئيتين S_i, S_j تحوي الأخرى ؛ وبذلك يمكننا أن نختار $l\ (= \max\{i, j\})$ بحيث إن $a, b \in S_l$. وعليه فإن $a - b, ab \in S_l$ وبالتالي $a - b, ab \in S$. ويؤدي هذا إلى أن S حلقة جزئية . سنترك للقارئ الحالة التي تكون فيها S_i مثاليات .

تسمح لنا المأخوذة (٢-١٣) بتعريف الحلقة الجزئية أو المثالي المولد (generated by) بمجموعة معطاة من العناصر ، لأنه إذا كانت X مجموعة جزئية من R، فإن تقاطع كل الحلقات الجزئية من R التي تحوي X تشكل حلقة جزئية من R تحوي X أيضا ، وهي الصغرى من بين الحلقات الجزئية من R التي تحوي X. تطبق ملاحظات مماثلة على المثاليات .

(٢-١٤) تعريف

الحلقة الجزئية المولدة بمجموعة جزئية X من R هي الحلقة الجزئية الصغرى في R التي تحوي X. والمثالي المولد بمجموعة جزئية X هو المثالي الأصغر في R الذي يحوي X.

قد يكون من المفيد أن نعطي وصفا داخليا للحلقة الجزئية أو المثالي المولد بمجموعة معطاة ولتكن X؛ أي الوصف الذي يوضح كيف تبنى عناصر الحلقة الجزئية أو المثالي من عناصر المجموعة X. سنعطي الآن هذا الوصف .

(٢-١٥) مأخوذة

إذا كانت X مجموعة جزئية من حلقة R، فإن :

(i) *الحلقة الجزئية من R المولدة بواسطة X تحوي كل المجاميع المنتهية للعناصر $\pm x_1 x_2 \dots x_n$، حيث $x_i \in X$، $n = 1, 2, \dots$.*

(ii) *إذا كانت R حلقة إبدالية بمحايد ، وكانت $X \neq \phi$، فإن المثالي المولد بواسطة X هو RX.*

البرهـــان

(i) نفرض أن S هي الحلقة الجزئية من R المولدة بـ X . ولما كانت S حلقة جزئية من R تحوي X، فإن S تحوي كل حواصل الضرب المنتهية لعناصر X؛ وبذلك تحوي المجموعة $\overline{S}$ التي عناصرها كل المجاميع المنتهية للعناصر من الصيغة :

$$\pm x_1 x_2 \dots x_n \text{ حيث } x_i \in X \text{ و } n = 1, 2, \dots$$

ومن ناحية أخرى، لما كانت $\overline{S}$ تحوي 0 (لأننا نعتبر الصفر حاصل جمع حدود عددها صفر)، فإنه من الواضح أنها حلقة جزئية من R تحوي X. لما كانت S الحلقة الجزئية الصغرى من هذا النوع فإن $\overline{S} \supseteq S$ وهكذا فإن هاتين المجموعتين متساويتان.

(ii) نفرض أن R إبدالية بمحايد . نتذكر أن RX ترمز للمجموعة التي تحوي كل العناصر من الصيغة :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \text{لكل} \quad r_i \in R \text{ ولكل } x_i \in X, n \geq 1$$

إذا كان $\overline{X}$ يرمز للمثالي في الحلقة R المولد بـ X، فإن كل عنصر $r_i x_i$ ينتمي إلى $\overline{X}$ ولذلك $RX \subseteq \overline{X}$. من ناحية أخرى، فإن RX مثالي في R لأن RX تشكل زمرة جمعية جزئية من R حسب (٢-٣)، وأيضا $R(RX) = (RR)X \subseteq RX$، لكن R حلقة إبدالية، إذن $RX \lhd R$. كما يلاحظ أن RX تحوي X، لإنه إذا كان $x \in X$، فإن $x = 1x \in RX$، حقيقة وجود المحايد في R حقيقة مهمة هنا. من تعريف $\overline{X}$ نستنتج أن $\overline{X} \subseteq RX$ ، وعليه فإن هاتين المجموعتين متساويتان.

نلاحظ أن وصف المثالي المولد بـ X يكون أكثر تعقيدا في حالات أكثر تعميما (تمرين ١١) ولن نعالجه هنا إذ إن اهتمامنا يتركز على الحلقات الإبدالية بمحايد .

لقد سبق أن عرفنا مجموع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من حلقة، ويمكن تعميم هذا التعريف إلى عدد منته من المجموعات الجزئية كما يلي :

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + \cdots + S_n = \{s_1 + \dots + s_n : s_i \in S_i\}$$

وبالتالي سنحصل على :

(٢-١٦) مأخوذة

إذا كانت $J_1, \ldots, J_n$ *مثاليات في الحلقة* R، *فإن* $J = \sum_{i=1}^{n} J_i$ *مثالي في الحلقة* R.

البرهـــان

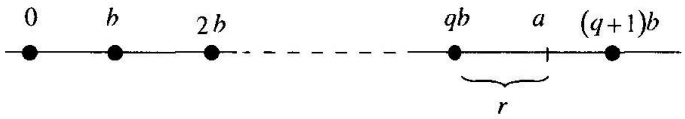
من الواضح (انظر المأخوذة (٢-٣)) أن J تشكل زمرة جزئية جمعية من R. إذا كان $j \in J$، فإن $j = \sum_{i=1}^{n} j_i$ حيث $j_i \in J_i$. ليكن $r \in R$، يلاحظ أن $rj = \Sigma r\, j_i \in J$ وبالمثل $jr \in J$. وإذن J يشكل مثاليا في R.

سنختم هذا الفصل بوصف الحلقات الجزئية والمثاليـات في الحلقة $\mathbb{Z}$. يعتبر تقديم وصف دقيق للحلقات الجزئية لحلقة معطاة إنجازا غير عادي، ولكن يمكن عمل ذلك في حالة $\mathbb{Z}$ بدون صعوبة كبيرة. سنحتاج إلى خاصة أساسية ومألوفة لـ $\mathbb{Z}$ تسـمى خاصـة القسمـة الإقليدية (Euclidean division property) وهي كما يلي :

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ وكان $b \neq 0$، فإنه يوجد عددان صحيحان r و q بحيث إن

$$a = bq + r \quad , \quad 0 \leq r < |b|$$

هذه النتيجة جزء من دراستنا في المراحل الأولى، وتكمن الصعوبة في تقديم برهان لها في أن نقرر من أين نبدأ؟ سنكتفي بالرسم التخطيطي التالي وننصح القارئ غير المقتنع بالرجوع إلى كتب أخرى، أنظر مثلا مبرهنة (١٢) صفحة ٤٩ في المرجع [Maclane *et al*, 1967].



(٢-١٧) مأخوذة

الحلقات الجزئية من $\mathbb{Z}$ *هي بالضبط الحلقات الجزئية* $n\mathbb{Z} = \{na : a \in \mathbb{Z}\}$ *حيث* $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

البرهـــان

من الواضح أن كلا من المجموعات الجزئية $n\mathbb{Z}$ يشكل حلقة جزئية من $\mathbb{Z}$. نفرض أن S أية حلقة جزئية من $\mathbb{Z}$. إذا كانت S هي الحلقة الصفرية فإن $S = 0\mathbb{Z}$. نفرض أن S ليست الحلقة الصفرية، وبالتالي فهي تحوي عنصرا غير صفري s. لما كانت S حلقة جزئية فإن $-s \in S$. وحيث إنه إما s أو $-s$ عدد صحيح موجب، فإن S تحوي بعض الأعداد الصحيحة الموجبة. تحوي أية مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة عددا أصغر، وهذه خاصة أساسية أخرى من خصائص $\mathbb{Z}$. نفرض أن n أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى S. لما كانت S حلقة جزئية، فهي تحوي بالإضافة إلى n العنصر $na = \pm(n + ... + n)$ الذي له $|a|$ حدا، حيث $a \in \mathbb{Z}$، وبالتالي $n\mathbb{Z} \subseteq S$. من ناحية أخرى، إذا كان s عنصرا اختياريا في S، فإننا باستخدام خاصة خوارزمية القسمة في $\mathbb{Z}$ نستطيع كتابة $s = nq + r$ حيث $q, r \in \mathbb{Z}$، $0 \le r < n$، ويؤدي هذا إلى أن $r = s - nq \in S + n\mathbb{Z} \subseteq S$. إذن إما $r = 0$ أو أن S تحوي عددا صحيحا موجبا أصغر من n، وحيث إن الاحتمال الثاني يناقض اختيار n، إذن $r = 0$ وبالتالي $s = nq \in n\mathbb{Z}$، وعليه فإن $S \subseteq n\mathbb{Z}$. إذن $S = n\mathbb{Z}$.

من الواضح أن $n\mathbb{Z}$ يشكل مثاليا في $\mathbb{Z}$ وهو مثالي مولد بـ n. لذلك فإن أية حلقة جزئية في $\mathbb{Z}$ تشكل مثاليا وهذه حالة غير عادية (انظر تمرين ١٠). نلاحظ أن حلقة القسمة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ هي الحلقة $\mathbb{Z}_n$ لفصول الرواسب قياس n التي أشير إليها بدقة أقل في مثال حلقة (٢). وعناصر هذه الحلقة هي المجموعات المشاركة $n\mathbb{Z} + m$، حيث m يمر على كل عناصر $\mathbb{Z}$. إذا كان $n > 0$ فإنه يمكن كتابة m على الصورة $qn + r$؛ حيث $0 \le r < n$، وبالتالي $n\mathbb{Z} + m = n\mathbb{Z} + r$. لذلك، إذا كان $n > 0$، فإنه يوجد عدد منته من المجموعات المشاركة المختلفة وهي:

$$n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} + 0,\ n\mathbb{Z} + 1, ..., n\mathbb{Z} + (n-1)$$

وغالبا ما تكتب بالشكل التالي:

$$[0],\ [1],\ [2], ..., [n-1]$$

يمكن التعبير عن العمليات في $\mathbb{Z}_n$ كما يلي:

$$[i] + [j] = [i + j],\ [i][j] = [\,ij],\ -[i] = [-i]$$

باستخدام خاصة خوارزمية القسمة، نستطيع أن نعبّر عن $[i+j]$، . . . الخ بواسطة أحد عناصر القائمة :

$$[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$$

بإضافة أو طرح مضاعف مناسب للعدد n .

بناء حلقات جديدة

لقد لاحظنا في الفصل السابق، كيفية بناء حلقات جديدة من حلقات معطاة بتكوين حلقات جزئية وحلقات القسمة. في هذا الفصل سنناقش ثلاث بنى مهمة - حلقة المجموع المباشر لحلقات، حلقة كثيرات الحدود وحلقة المصفوفات. مثل هذه البنى مهمة لعدة أسباب: أولها إنها ستضيف أمثلة إلى محفظة أمثلتنا الملموسة، وسيكون ذلك مفيدا في إعطاء نظرة فاحصة إلى مبرهنات معروفة، كما يساعد في تجربة مدى صحة بعض النتائج المتوقعة. وثانيها إنه من الممكن في بعض الأحيان إثبات أن بعض الصفات الجبرية يمكن أن ترثها الحلقة من مركباتها التي استخدمت في بنائها، وبالتالي تعميم مبرهنة ما إلى فصل أكبر من الحلقات. وثالثها إنه من الممكن إثبات مبرهنات تنص على أن حلقات معينة نرغب في دراستها يمكن بناؤها اعتمادا على حلقات معروفة لدينا.

١- المجموع المباشر

نفرض أن $R_1, \ldots, R_n$ جماعة منتهية من الحلقات. نفرض أن R هي الجداء الديكارتي (cartesian product) للمجموعات R_i ونعرف العمليات على R بواسطة المركبات كما يلي:

$$(r_1, \ldots, r_n) + (s_1, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, \ldots, r_n + s_n)$$

$$-(r_1, \ldots, r_n) = (-r_1, \ldots, -r_n)$$

$$(r_1, ..., r_n)\,(s_1, ..., s_n) = (r_1 s_1, ..., r_n s_n)$$

يمكن بسهولة إثبات أن هذه العمليات تجعل R حلقة ويكون $(0, ..., 0)$ هو صفرها. كما نلاحظ أن الإسقاطات الإحداثية (coordinate projections)

$$\pi_i\,(r_1, ..., r_n) \to r_i$$

هي تشاكلات غامرة من الحلقة R إلى الحلقات R_i. ونعرِّف هذا المجموع المباشر عندما $n = 0$ بأنه الحلقة الصفرية $\{0\}$، لأن هذا التأويل سيكون ملائما أحيانا.

(٣-١) تعريف

الحلقة R المعرفة أعلاه هي المجموع المباشر الخارجي (external direct sum) *للحلقات $R_1, ..., R_n$ ويرمز لها بالرمز*

$$R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$$

ملاحظة

يوجد غموض معين في التعريف المعطى. لنفرض أن s_1 و r_1 لا ينتميان فقط إلى R_1 بل إلى R_2 أيضا. إن الرمز $r + s$ غامض، حيث لا يعرف الجمع هل هو الجمع في R_1 أو الجمع في R_2. وحتى نكون أكثر دقة، يجب أن نوضح العمليات في كل R_i بشكل محدد ونكتب $r_i +_i s_i$ أو ما شابهه. ومع ذلك، نشير إلى أنه من غير المحتمل أن تسبب هذه النقطة غموضا ولذلك لن نتابع نقاشها أكثر.

من المفيد أن ندرس المجموع المباشر الخارجي بشكل أكثر دقة. نفرض أن J_i مجموعة كل العناصر $(0, ..., 0, r_i, 0, ..., 0)$ من R لكل $i = 1, ..., n$؛ أي مجموعة عناصر R التي تكون كل مركباتها أصفارا ما عدا المركبة التي رقمها i التي من المحتمل ألا تساوي صفرا. يستطيع القارئ - بسهولة - أن يثبت أن J_i تشكل مثاليا في الحلقة R، ويعطينا اقتصار الإسقاط الإحداثي π_i على J_i تماثلا بين J_i و R_i (يلاحظ أن R_i لا تشكل حلقة جزئية من R إلا إذا كان $n = 1$). كذلك $\sum_{i=1}^{n} J_i = R$، ولما كان $\sum_{j \neq i} J_j$

يتكون من كل عناصر R التي مركبتها رقم i تساوي صفرا فإن $J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$.

هذه الحقائق تؤدي إلى تقديم التعريف التالي :

(٣-٢) تعريف

إذا كانت R حلقة وكانت $J_1, \ldots, J_n$ مثاليات في الحلقة بحيث إن

$$R = \sum_{i=1}^{n} J_i \qquad \text{(i)}$$

$$J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\} \text{ لكل } i = 1, \ldots, n \qquad \text{(ii)}$$

فإن R تسمى المجموع المباشر الداخلي (internal direct sum) للمثاليات J_i ونكتبها بنفس طريقة كتابة المجموع المباشر الخارجي، $R = J_1 \oplus \ldots \oplus J_n$ وعندما $n = 0$ فإننا نُؤوِّل التعريف بقولنا إن الحلقة الصفرية $\{0\}$ هي المجموع المباشر الداخلي لمجموعة خالية من المثاليات .

سيتضح سبب استخدام رمز المجموع المباشر الخارجي للتعبير عن المجموع المباشر الداخلي بعد المأخوذة التالية . يمكن أن ينظر إلى المجموع المباشر الخارجي على أنه بناء حلقة أكثر تعقيدا من حلقات معطاة بينما المجموع المباشر الداخلي هو تهشيم الحلقة المعطاة إلى مركبات أبسط .

(٣-٣) مأخوذة

إذا كانت R هي المجموع المباشر الداخلي لمثالياتها $J_1, J_2, \ldots, J_n$ فإن لكل عنصر r في R تمثيل وحيد على الصورة التالية :

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$$

حيث $r_i \in J_i$ والعمليات على R هي عمليات على المركبات بالنسبة لهذا التمثيل .

البرهـــان

لما كان $R = \Sigma J_i$، فإن كل عنصر في R له على الأقل تمثيل واحد على الشكل المعطى في منطوق المأخوذة. لنفرض أن له تمثيلين:

$$r_1 + \cdots + r_n = r_1' + \cdots + r_n'$$

حيث $r_i,\ r_i' \in J_i$، وبالتالي فإن:

$$r_i - r_i' = \sum_{j \neq i} \left(r_j' - r_j\right) \in J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$$

لذلك فإن $r_i = r_i'$، وبالتالي فإن التمثيل وحيد.

نلاحظ أنه كنتيجة لفروض الحلقة نحصل على:

$$(r_1 + \ldots + r_n) + (s_1 + \ldots + s_n) = (r_1 + s_1) + \ldots + (r_n + s_n)$$

$$-(r_1 + \ldots + r_n) = (-r_1) + \ldots + (-r_n)$$

حيث $r_i, s_i \in J_i$. لما كان كل J_i مثاليا فإنه حسب الشرط (ii) من تعريف المجموع المباشر الداخلي:

$$J_i J_j \subseteq J_i \cap J_j = \{0\} \text{ لكل } i \neq j$$

إذن:

$$r_i s_j = 0 \text{ إذا كان } i \neq j$$

وبالتالي

$$(r_1 + \ldots + r_n)(s_1 + \ldots + s_n) = r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$$

باستخدام نفس رموز منطوق المأخوذة (٣-٣) يلاحظ أن التطبيق $\pi_i : r \to r_i$ حسن التعريف من R إلى J_i. يسمى π_i الإسقاط من R على J_i المرتبط بالتفريق $R = J_1 \oplus \ldots \oplus J_n$ ولأن العمليات على R هي عمليات على المركبات فإنه يمكن بسهولة ملاحظة أن π_i تشاكل غامر.

يلاحظ أن العلاقة بين المجموع المباشر الداخلي والمجموع المباشر الخارجي أصبحت الآن واضحة، حيث لاحظنا أن المجموع المباشر الخارجي لمجموعة من الحلقات $R_1, \ldots, R_n$ هو المجموع المباشر الداخلي لمثاليات $J_i \cong R_i$. من ناحية أخرى، إذا كانت R المجموع المباشر الداخلي لمثاليات $J_1, \ldots, J_n$، فهي تماثل المجموع المباشر