جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الثالثة

مقرر : جبر الحلقات

المحاضرة الاولى (5)

(المصدر)

الحلقات ، الحلقيات والجبر الخطي

تألف : ب. هارتلي / جامعة مانشستر

ب.هاوكس / جامعة وارك

ترجمة : يوسف عبدالله و احمد حميد

قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة الملك سعود

وذلك حسب تعريف الضرب في R^R، وعليه فإن θ تشاكل حلقات. تسمى $\mathrm{im}\theta$ حلقة دوال كثيرات الحدود على R. لذلك يكون التطبيق $f \in R^R$ دالة كثيرة حدود إذا وفقط إذا كان يوجد $a_0, \ldots, a_n \in R$ بحيث إن $f(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i$ لكل $r \in R$. يلاحظ أن $\ker\theta$ تحوي كل عناصر $R[x]$ التي تتلاشى عند التعويض بعناصر R، وتحدد كثيرتا حدود $a, b \in R[x]$ نفس التطبيق في R^R إذا وفقط إذا كان $a - b \in \ker\theta$. في حالة كون R حقلا يمكن بسهولة إيجاد معيار للتطبيق θ حتى يكون متباينا.

(٣-١٢) مبرهنة

يكون التطبيق $\theta : K[x] \to K^K$ المذكور أعلاه متباينا إذا وفقط إذا كان K غير منته.

البرهـــان

نفرض أولا أن K غير منته. لتكن $a \in \ker\theta$ فيكون $a(r) = 0$ لكل $r \in K$، أي أن كل عنصر من K هو جذر لـ a. نلاحظ حسب مبرهنة (٣-١١) أن أي عنصر غير صفري في $K[x]$ له عدد منته من الجذور ويؤدي هذا إلى أن $a = 0$ لأن a لها عدد غير منته من الجذور. وإذن $\ker\theta = \{0\}$ وبالتالي فإن θ متباين.

لنفرض الآن أن K منته، ولنفرض أن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ عناصره. عندئذ يكون $n \geq 1$ و $(x - r_1) \ldots (x - r_n)$ عنصر غير صفري من $K[x]$. ولكثيرة الحدود هذه كل عنصر من عناصر K جذر، وبالتالي فهي عنصر من عناصر $\ker\theta$. إذن $\ker\theta \neq \{0\}$ إذا كان K منتهيا.

إن فكرة العنصر الأولي في الحلقة $K[x]$ (حيث K حقل كالعادة) هي خاصية مهمة، وهي فكرة مشابهة جدا لتعريف العدد الأولي في حلقة الأعداد الصحيحة. ومن الممكن أن نثبت أن كل عنصر من $K[x]$ يمكن كتابته كحاصل ضرب عدد من عناصر $K[x]$ الأولية بطريقة وحيدة. لن نتابع هذه النقطة، حيث ستناقش بشكل أكثر تفصيلا مستقبلا. في الحقيقة سيتركز جزء كبير من الفصل التالي على خواص تحليل (factorization) من هذا النوع.

٣ – حلقات المصفوفات

إذا كانت R أي حلقة، فإننا نستطيع أن نعرّف $M_n(R)$، مجموعة كل المصفوفات من النوع $n \times n$ التي عناصرها في R، بنفس الطريقة في حالة كون R حقلا. إذا عرف الجمع والضرب بالطريقة العادية، فإن $M_n(R)$ تشكل حلقة. يمكن إثبات ذلك بنفس الطريقة كما في حالة الحقل. والسبب الرئيسي لدراسة المصفوفات على حقل قبل غيرها هو ظهورها الطبيعي عند دراسة التحويلات الخطية (linear transformations) للفضاءات المتجهة على حقل. لما كنّا سندرس الحلقيات (modules) على حلقة والتي نحصل عليها بطريقة ما عندما نستبدل حقل الفضاءات المتجهة بشيء أعم وهو الحلقة، فإنه لن يكون مستغربا لو تعرضنا لمصفوفات على حلقات معينة في مكان آخر في الكتاب. لن نحتاج إلى معلومات كثيرة عن حلقات المصفوفات، لكن الملاحظات التالية لها أهمية عامة.

ملاحظات

١ – نفرض أن R حلقة وأن $R^2 \neq \{0\}$ (أي يوجد $r, s \in R$ بحيث إن $rs \neq 0$). فيكون:

$$\begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & rs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن $M_2(R)$ غير إبدالية. بالمثل عندما تكون $n > 2$ فإن $M_n(R)$ غير إبدالية. وفي الواقع، تكون $M_n(R)$ إبدالية إذا وفقط إذا كان $n = 1$ وكانت R إبدالية.

٢ – نقول بشكل دارج إن $M_n(R)$ لها كثير من الحلقات الجزئية وقليل من المثاليات. تكون المجموعات الجزئية للمصفوفات المثلثية العليا (upper trianglular matrices)، والمصفوفات المثلثية السفلى (lower triangular matrices)، والمصفوفات القطرية وكذلك المصفوفات التي تكون عناصر مجموعة معينة من صفوفها أو أعمدتها تساوي صفرا حلقات جزئية. يستطيع القارئ المهتم أن يثبت أن المثاليات في الحلقة $M_n(R)$ هي بالضبط المجموعات الجزئية $M_n(J)$ حيث $J \lhd R$.

٣ - من المفيد في التعامل مع المصفوفات عادة أن نستخدم المصفوفات $E_{ij} \in M_n(R)$ التي عددها n^2؛ حيث يساوي عنصر المصفوفة E_{ij} في الموقع (i, j) المحايد، ويساوي باقي عناصرها أصفارا (نفترض طبعا أن R حلقة بمحايد). إذا كان $(r_{ij}) \in M_n(R)$، فإنه يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة كتركيب خطي على الصورة $\Sigma r_{ij} E_{ij}$. إذا كانت R هي الحقل K، فإن $M_n(K)$ تشكل فضاء متجها ذا بعد (dimension) n^2 على K والمصفوفات E_{ij} تشكل أساسا (basis) له على K. يلاحظ أن ضرب المصفوفات E_{ij} هو حسب القاعدة:

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

حيث δ_{jk} هي دلتا كرونكر (Kronecker delta) ويمكن بسهولة التأكد من أن $M_n(K)$، تمثل جبرية (algebra) على الحقل K حسب التعريف التالي:

الجبرية على الحقل K هي مجموعة A تشكل حلقة وفضاء متجها على K بحيث يكون لهما نفس بنية الزمرة الجمعية ويتحقق الشرط:

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

لكل $a, b \in A$ ولكل $\lambda \in K$. لن نحتاج إلى هذا التعريف المهم في كثير من الموضوعات في هذا الكتاب.

٤ - يمكن تعريف التطبيق $\det : M_n(R) \to R$ الذي يرسل المصفوفة إلى محددها (determinant) في حالة كون الحلقة R إبدالية بنفس الطريقة التي عرّف فيها في حالة كون R حقلا. ويمكن التأكد من صحة كثير من خواص المحددات على حلقة إبدالية بنفس الطريقة كما لو كانت هذه المحددات على حقل، دون تغيير في البراهين، وبعض هذه الخواص سنحتاجها مستقبلا.

التحليل في الحلقات التامة

النتيجة الأساسية في هذا الفصل هي وجود تحليل وحيد لعناصر حلقات تامة معينة (تسمى حلقات تامة رئيسة) إلى عناصر أولية. ولذلك تتصرف هذه الحلقات في هذا الخصوص كما تتصرف الأعداد الصحيحة. سنثبت أن خاصة مشابهة لخاصة خوارزمية القسمة في $\mathbb{Z}$ تكفي لأن تجعل حلقة تامة حلقة تامة رئيسة.

١- الحلقات التامة

لنتذكر تعريف الحلقة التامة الذي أشير إليه في نهاية الفصل الأول وهي حلقة إبدالية بمحايد لا يساوي الصفر، ولا يوجد فيها قواسم للصفر، والشرط الأخير يؤدي إلى صحة استخدام قانون الاختصار للضرب في الحلقات التامة، أي أنه إذا كان $a \neq 0$ وكان $ax = ay$ فإن $x = y$. قد يكون من المناسب الإشارة إلى أنه لا يوجد اتفاق شامل على تعريف الحلقة التامة؛ بعض المؤلفين يحذفون الشرط $1 \neq 0$ وبعضهم يسقطون شرط الإبدال. المثال الأكثر وضوحا على حلقة تامة هو حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. كذلك أي حقل هو حلقة تامة، ولذلك بصفة خاصة، $\mathbb{Z}_p$ حلقة تامة عندما يكون p عددا أوليا. من ناحية أخرى لا تشكل $\mathbb{Z}_n$ حلقة تامة إذا كان n عددا غير أولي بسبب وجود قواسم للصفر؛ وكمثال على ذلك $\mathbb{Z}_6$ حيث العناصر $[2]$ و $[3]$ ليست صفرية، لكن $[2]\,[3] = [6] = [0]$.

تبرز الحلقات التامة بشكل طبيعي في بعض التخصصات الرياضية المهمة؛ حيث تظهر كثيرا على الصور التالية:

(١) **حلقات جزئية من حقل.** إذا كان K حقلا فإنه لا يحتوي قواسم للصفر، لأنه إذا كان $a,b \in K$ وكان $ab = 0$ فإن:

$$b = 1.b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}.0 = 0$$

كذلك K حلقة إبدالية بمحايد لا يساوي الصفر، لذلك فإن K حلقة تامة. من الواضح أن أية حلقة جزئية من K ولها نفس المحايد، تشكّل حلقة تامة. فالحلقات التامة تظهر بشكل طبيعي كحلقات جزئية من الحقول، وفي الواقع سنرى بعد قليل أن كل حلقة تامة تظهر بهذه الكيفية. تؤدي حلقات جزئية معينة من حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ دورا مهما في نظرية الأعداد الجبرية، مثل حلقة أعداد جاوس والتي سبق أن أشير إليها في مثال حلقة (٥). وقد حفّزت الأعداد الصحيحة دراسة مثل هذه الحلقات، ويشمل ذلك محاولة الحصول على خواص لهذه الحلقات مثل وجود ووحدانية التحليل إلى عناصر أولية.

(٢) **حلقات كثيرات الحدود.** لقد لاحظنا في (٣-٧) أنه إذا كانت R حلقة تامة، فكذلك تكون $R[x]$، بالاستقراء نستنتج أن حلقة كثيرات الحدود $R[x_1, ..., x_n]$ في n متغيرا تمثل حلقة تامة ويمكن أن تعرف بـ $(R[x_1, ..., x_{n-1}])[x_n]$. تهتم نظرية الهندسة الجبرية بالأشكال الهندسية التي تظهر كمجموعات لحلول معادلات كثيرات الحدود في الفضاءات التآلفية والإسقاطية (affine and projective spaces) التي يكون بعدها على حقل يساوي n. وكمثال على ذلك، يمكن وصف كرة الوحدة في الفضاء الإقليدي الثلاثي بأنها مجموعة حلول المعادلة $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$. وليس مستغربا أن تتطلب هذه الدراسة تحليلا دقيقا لبنية الحلقات التامة من الشكل $R[x_1, ..., x_n]$. والآلية التي نحتاج إليها من الحلقات الإبدالية في دراسة نظرية الأعداد الجبرية والهندسية الجبرية عولجت علاجا شاملا في المرجع [Zariski *et al*, 1958].

كما سبق أن ذكرنا، كل حلقة تامة تظهر كحلقة جزئية من حقل. وهذا هو الموضوع التالي الذي سندرسه.

(٤-١) مبرهنة

إذا كانت R حلقة تامة، فإنه يوجد حقل K يحوي حلقة جزئية تماثل R.

البرهـــان

سيذكرنا البرهان بالطريقة التي بُني بها حقل الأعداد النسبية من الأعداد الصحيحة. لما كانت التفاصيل تتطلب جهدا ومساحة لذلك سنكتفي بإعطاء الخطوات العريضة للبرهان.

الخطوة (١)

عرّف على مجموعة الأزواج المرتبة $S = \{(r_1, r_2) : r_1, r_2 \in R, r_2 \neq 0\}$ العلاقة $(r_1, r_2) \sim (s_1, s_2) \Leftrightarrow r_1 s_2 = r_2 s_1$ وأثبت أنها علاقة تكافؤ.

الخطوة (٢)

عرّف $[r_1, r_2]$ بأنه فصل تكافؤ S الذي يحوي الزوج المرتب (r_1, r_2)، وافرض أن K مجموعة كل هذه الفصول. آخذين في الاعتبار أن $[r_1, r_2]$ يمثل الكسر r_1/r_2، لنعرف عمليتي الجمع والضرب على مجموعة فصول التكافؤ كما يلي:

$$[r_1, r_2] + [s_1, s_2] = [r_1 s_2 + r_2 s_1, r_2 s_2]$$

$$[r_1, r_2][s_1, s_2] = [r_1 s_1 + r_2 s_2]$$

أثبت الآن أن هاتين العمليتين حسنتا التعريف على K. ويتضمن هذا إثبات أن $r_2 s_2 \neq 0$ (نحتاج عند هذه النقطة إلى غياب قواسم الصفر) وأن تعريفي العمليتين لا يعتمدان على ممثلي فصلي التكافؤ.

الخطوة (٣)

تحقق من أن K يحقق شروط الحقل مع هاتين العمليتين، أي أن K و $K\backslash\{0\}$ تشكلان زمرتين إبداليتين، الأولى بالنسبة إلى عملية الجمع والثانية بالنسبة لعملية الضرب وكذلك يتحقق أحد قانوني التوزيع. العنصر الصفري هو فصل التكافؤ الذي

يحوي جميع الأزواج المرتبة $(0, r)$ حيث $r \neq 0$، والعنصر المحايد الضربي هو فصل التكافؤ الذي يحوي جميع الأزواج المرتبة (r, r) حيث $r \neq 0$. أيضا:

$$-[r_1, r_2] = [-r_1, r_2]$$

$$[r_1, r_2]^{-1} = [r_2, r_1] \qquad \text{إذا كان } r_1 \neq 0$$

الخطوة (٤)

أثبت أن التطبيق $\mu : R \to K$ المعرف بـ $\mu(r) = [r, 1]$ هو تشاكل متباين. لذلك $\mu(R)$ حلقة جزئية من K تماثل R.

يسمى الحقل الذي تم بناؤه عادة حقل الكسور (field of fractions) للحلقة التامة R. ويوجد إثبات مفصل لهذه الحقيقة في المرجع [Maclane *et al*, 1967].

٢ – القواسم، عناصر الوحدة والعناصر المتشاركة

إن الهدف هو إيجاد شيء مشابه لخواص التحليل الموجودة في $\mathbb{Z}$ في صنف واسع من الحلقات، وبصفة خاصة في حلقات تامة معينة. وقد سبق أن ألمحنا إلى خواص التحليل في $\mathbb{Z}$ عدة مرات. للتوضيح سنلخص هذه الحقائق والتي هي بدون شك مألوفة للقارئ. أولا، يسمى $p \in \mathbb{Z}$ عددا أوليا إذا كان (i) $p \neq \pm 1$ (ii) إذا كان $p = ab$، حيث $a, b \in \mathbb{Z}$، فإنه إما $a = \pm 1$ أو $b = \pm 1$. مبرهنة التحليل الوحيد في $\mathbb{Z}$ هي كما يلي:

يمكن تحليل كل عدد صحيح غير صفري n على الصورة:

$$\pm 1.p_1 \dots p_m$$

حيث $m \geq 0$ و p_i أعداد أولية موجبة. هذا التحليل وحيد تحت سقف (up to) ترتيب الأعداد p_i (أي، لا نأخذ بعين الاعتبار الترتيب الذي تظهر به الأعداد p_i).

هذه هي المبرهنة التي نرغب تعميمها. سنلاحظ أن هذه الحقيقة حول $\mathbb{Z}$ هي حالة خاصة. سنتعامل خلال هذا الفصل معاملة شاملة مع الحلقات التامة بالرغم من أن بعض النتائج صحيحة بشكل أعم ولكن الفرض أن الحلقات المستخدمة هي حلقات تامة سيجعل الأشياء أكثر وضوحا.

ترميز

سنكتب R^* للدلالة على مجموعة العناصر غير الصفرية في الحلقة R.

(٤-٢) تعريف

إذا كان s و r عنصرين من حلقة تامة R، فإنه يقال إن r يقسم s (ويرمز لذلك بالرمز $r|s$) إذا وجد عنصر $t \in R$ بحيث إن $s = rt$. يسمى r في هذه الحالة عاملا (factor) أو قاسما (divisor) للعنصر s. فالمعادلة $r0 = 0$ تعني أن كل عنصر من R هو قاسم للصفر بالرغم من كون R ليس فيها قواسم للصفر. يبدو أن هذه المصطلحات غير جيدة ولكن يبدو أنها لا تؤدي إلى أي ارتباك من الناحية العملية. نشير من ناحية أخرى إلى أن الصفر لا يقسم أي عنصر غير صفري في R.

ماذا يحدث لو تفحصنا خاصية التحليل في حقل الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$؟ إذا كان $r, s \in \mathbb{Q}^*$، فإن $r = (r/s)s$، وبالتالي فإن أي عنصر في $\mathbb{Q}^*$ يقسم كل عنصر آخر فيها. لذلك لا توجد أعداد مرشحة لتكون أعدادا أولية في $\mathbb{Q}$، وبالتأكيد لا يمكن الوصول إلى وحدانية التحليل فيها. و يمكن تجنب هذه الصعوبة بالاتفاق على عدم الخوض فيها ولكي نقوم بذلك نحتاج إلى بعض التعاريف الآخرى.

(٤-٣) تعاريف

(ا) *نفرض أن R حلقة تامة. يقال عن عنصر إنه عنصر وحدة (unit) في R إذا كان قاسما للمحايد؛ أي أن العنصر u من R يكون عنصر وحدة إذا وجد عنصر v في R بحيث إن $uv = 1$.*

(ب) *نفرض أن R حلقة تامة. نقول عن عنصرين r, s من R إنهما متشاركان (associates) إذا كان r يقسم s وكان s يقسم r.*

ملاحظات

(١) من الواضح أن أي عنصر وحدة هو عنصر غير صفري. وسنلاحظ أن مجموعة عناصر الوحدة في الحلقة التامة تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب. وكمثال

على ذلك، إن $\mathbb{Z}$ لها عنصرا وحدة هما ± 1 وهما يشكلان زمرة دوروية رتبتها 2 مولدة بالعنصر 1-. من ناحية أخرى، مجموعة عناصر الوحدة في $\mathbb{Q}$ هي $\mathbb{Q}^*$ وهي أكبر ما يمكن. بالتأكيد تشكل $\mathbb{Q}^*$ زمرة ضربية لأن $\mathbb{Q}$ حقل. باستخدام (٣-٧) وبفحص درجات كثيرات الحدود يمكن استنتاج أن عناصر الوحدة في $K[x]$ هي كثيرات الحدود التي درجتها صفر، أي هي عناصر K^*.

(٢) إذا كان $a \in R$ وكان u عنصر وحدة في R، فإنه يوجد v بحيث إن $uv = 1$ وعليه فإن $a = u(va)$. وبالتالي فإن أي عنصر وحدة يقسم كل عنصر في R (كما يقسم ± 1 كل عنصر في $\mathbb{Z}$).

(٣) يلاحظ أن 2 و 1 بالرغم من أنهما ليسا متشاركين في $\mathbb{Z}$ فإنهما متشاركان كعنصرين من حلقة أكبر وهي $\mathbb{Q}$. وبصورة أعم، العنصران m, n من $\mathbb{Z}^*$ يكونان متشاركين في $\mathbb{Z}$ إذا كان $m = \pm n$، بينما يكونان دائما متشاركين في $\mathbb{Q}$. لذلك فإن مفاهيم القسمة وعناصر الوحدة والتشارك لا تعتمد فقط على العناصر بل تعتمد أيضا على الحلقة التي تنتمي إليها هذه العناصر. لذلك فإنه في بعض الأحيان قد يكون من الضروري التأكيد على ذلك بالتحدث عن التشارك في R، . . . الخ.

تـرمـيـز

لقد سبق أن تم تعريف الجداء AB لمجموعتين غير خاليتين B و A من حلقة R. في الحالة التي تكون فيها $A = \{a\}$؛ أي مجموعة تحوي عنصرا وحيدا a، سنكتب aB بدلا من $\{a\}B$. يمكن بسهولة التأكد من أن $aR = \{ar : r \in R\}$ بالرغم من أنه لم يعرف بهذه الطريقة. باستخدام (٢-١٥)، إذا كانت R حلقة تامة فإنه يمكن التأكد بسهولة أن aR (أو Ra) يشكل مثاليا مولدا بالعنصر a.

سنثبت الآن مأخوذة جامعة تضع التعاريف التي سبق التطرق إليها في مواقعها المناسبة.

(٤-٤) مأخوذة

إذا كانت R حلقة تامة، فإن:

(i) s يقسم t إذا وفقط إذا كان $sR \supseteq tR$

(ii) u عنصر وحدة في R إذا وفقط إذا كان $uR = R$

(iii) تشكل المجموعة U التي تحوي كل عناصر الوحدة للحلقة التامة R زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الضرب، وإذا كان $u \in U$ وكان $v|u$ فإن $v \in U$

(iv) علاقة التشارك علاقة تكافؤ على R وللاختصار نرمز لها بالرمز $\sim$. ويكون فصل التكافؤ لهذه العلاقة الذي يحوي العنصر a على الصورة $\{au : u \in U\}$ وكذلك

$$a \sim b \Leftrightarrow aR = bR \Leftrightarrow a = bu$$

حيث u عنصر وحدة في R.

(v) العلاقة «يقسم» منسجمة مع $\sim$ ومجموعة فصول التكافؤ ترتب جزئيا بواسطة العلاقة المحدثة بالعلاقة «يقسم».

البرهـــان

(i) إذا كان s يقسم t، فإنه يوجد $r \in R$ بحيث إن $t = sr$. لذلك $tR = (sr)R = s(rR) \subseteq sR$. وبالعكس، لنفرض أن $tR \subseteq sR$، فيكون $t = t1 \in tR$ وبالتالي $t \in sR$، وإذن $t = sr$ لعنصر $r \in R$، وبالتالي s يقسم t.

(ii) باستخدام (i) نحصل على:

$$u \text{ عنصر وحدة} \Leftrightarrow u \text{ يقسم } 1 \Leftrightarrow 1R = R \supseteq uR.$$

ويعطي هذا النتيجة المطلوبة.

(iii) إذا كان u_1, u_2 عنصري وحدة، فإنه يوجد $v_1, v_2 \in R$ بحيث إن $u_1 v_1 = u_2 v_2 = 1$ وإذن $(u_1 u_2)(v_1 v_2) = (u_1 v_1)(u_2 v_2) = 1$ وبالتالي $u_1 u_2 \in U$. أيضا $1 \in U$ والعنصر v_1 ينتمي إلى U ويكون معكوس u_1 الضربي. وعليه فإن U تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب وهي إبدالية لأن R إبدالية. نفرض الآن أن $uw = 1$ وأن v يقسم u فيكون $u = vv'$ حيث $v' \in R$، وبالتالي $v(v'w) = 1$. إذن v عنصر وحدة.

(iv) حسب التعريف $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $a|b$ و $b|a$. لما كان $a = 1.a$ فإن $a \sim a$ وبالتالي فالعلاقة انعكاسية. كذلك العلاقة تناظرية من تعريفها. من الواضح

أن $b|c$ و $a|b$ يؤدي إلى أن $a|c$ وبالتالي فالعلاقة متعدية . إذن العلاقة ~ تمثل علاقة تكافؤ . باقي (iv)سيتحقق إذا أثبتنا أن $a \sim b \Leftrightarrow b = au$ حيث u عنصر وحدة . نفرض أن $a \sim b$ و $a \neq 0$ فيكون a يقسم b و b يقسم a . إذن $a = bv$ و $b = au$ حيث $u, v \in R$. إذن $a = auv$ وبالتالي $uv = 1$ حسب قانون الاختصار ، وعليه فإن u عنصر وحدة . وبالعكس لنفرض أن $b = au$ حيث u عنصر وحدة . فيكون $uv = 1$ حيث $v \in R$. من الواضح أن a يقسم b وكذلك b يقسم a لأن $a = bv$. إذن $a \sim b$. النتيجة صحيحة عندما $a = 0$ حيث إن العنصر الوحيد الذي يكافئ الصفر هو الصفر نفسه .

(v) عندما نقول إن علاقة «يقسم» منسجمة مع ~ فإننا نعني أنه إذا كان $[a], [b]$ فصلي تكافؤ ، فإن التعريف :

$$[a]|[b] \Leftrightarrow a|b$$

مستقل عن اختيار a, b ممثلي فصلي التكافؤ . لكي نتأكد أن ذلك هو الحاصل ، نفرض أن $[a] = [a']$ و $[b] = [b']$. باستخدام (iv) و (i) نحصل على :

$$a|b \Leftrightarrow aR \supseteq bR \Leftrightarrow a'R \supseteq b'R \Leftrightarrow a'|b'$$

وهو المطلوب . كما هو معلوم فإن المجموعة تكون مرتبة جزئيا إذا وجدت علاقة ρ على المجموعة بحيث تكون متعدية وتخالفية ، حيث تعني تخالفية أن :

$$a\rho b, b\rho a \Leftrightarrow a = b$$

نلاحظ أن علاقة «يقسم» على مجموعة فصول التكافؤ علاقة متعدية ، وذلك باستخدام الخاصة المناظرة على عناصر R . أيضا إذا كان $[a]$ يقسم $[b]$ و $[b]$ يقسم $[a]$ فإنه من التعريف يكون a يقسم b و b يقسم a . وإذن a, b متشاركان وبالتالي $[a] = [b]$.

ترميز

سيرمز لمجموعة العناصر المتشاركة مع عنصر معطى a في حلقة تامة R بالرمز $[a]$. نأمل أن لا يسبب ذلك أي ارتباك مع استخدامنا لنفس الرمز للمجموعات المشاركة لـ $\mathbb{Z}_n$.

٣ – حلقات التحليل الوحيد

إحدى الطرق لتعميم مبرهنة معطاة هي إعطاء إسم للحلقات التي نتوقع أن تحقق المبرهنة ثم يتم الاستقصاء عن صنف الحلقات التي كونت بتلك الطريقة لكي نتمكن من تحديد علاقتها بالأصناف الأخرى من الحلقات. سنعمل ذلك مع «حلقات التحليل الوحيد».

بالنظر إلى الملاحظات حول عناصر الوحدة المذكورة سابقا، نستنتج أن التعريف التالي هو مثيل واضح لتعريف «الأولي» في الأعداد الصحيحة. من ناحية أخرى، لقد جرت العادة على ربط اسم «غير قابل للتحليل» بهذه الفكرة ونحتفظ بإسم «الأولي» لشيء يختلف قليلا.

(٤–٥) تعريف

نفرض أن R حلقة تامة. يقال إن عنصرا r من R غير قابل للتحليل (irreducible) في R إذا كان: (i) r ليس عنصر وحدة في R و (ii) في أي تحليل $r = ab$ كحاصل ضرب عنصرين a, b من R فإنه إما a عنصر وحدة أو b عنصر وحدة (وبذلك يكون الآخر متشاركا مع r).

هذا يعني أن العناصر غير القابلة للتحليل هي التي يكون لها تحليلات تافهة فقط محدثة بسبب عناصر الوحدة. لاحظ أن المعادلة $0.0 = 0$ تعني أن 0 قابل للتحليل.

ملاحظات

١- يمكن بسهولة رؤية أن كل عنصر متشارك مع عنصر غير قابل للتحليل يكون غير قابل للتحليل. لأنه إذا كان r غير قابل للتحليل وكان $r \sim s$، فإن $r = us$، حيث u عنصر وحدة. من الواضح أن s ليس عنصر وحدة. إذا كان $s = vt$، فإن $r = (uv)t$ وبالتالي فإنه إما تكون t عنصر وحدة أو يكون uv عنصر وحدة. في الحالة الثانية يكون v أيضا عنصر وحدة حسب (٤–٤) (iii).

٢- نلاحظ أن فكرة «غير قابل للتحليل» مثل كثير من الأفكار الأخرى في هذا الفصل تعتمد على الحلقة التي ندرس فيها هذه الفكرة. مثال ذلك العنصر 2 غير قابل للتحليل في $\mathbb{Z}$ ولكنه عنصر وحدة في الحلقة الأوسع $\mathbb{Q}$.