

مثال: أنبوبة قطرها 20cm عند أحد الإطراف الذي يرتفع عن مستوى إسناد أفقي بمقدار 5m وقطرها 5cm عند الطرف الآخر الذي يرتفع عن نفس مستوى الإسناد بمقدار 3m فإذا كان ضغط الماء عند المقطع الأول هو $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ وسرعة السريان عند نفس المقطع 1 m/S . احسب سرعة السريان والضغط عند المقطع الآخر.

الحل:

$$A_1 = (\pi/4)D_1^2 = (\pi/4)(0.2)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$A_2 = (\pi/4)D_2^2 = (\pi/4)(0.05)^2 = 0.002 \text{ m}^2$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

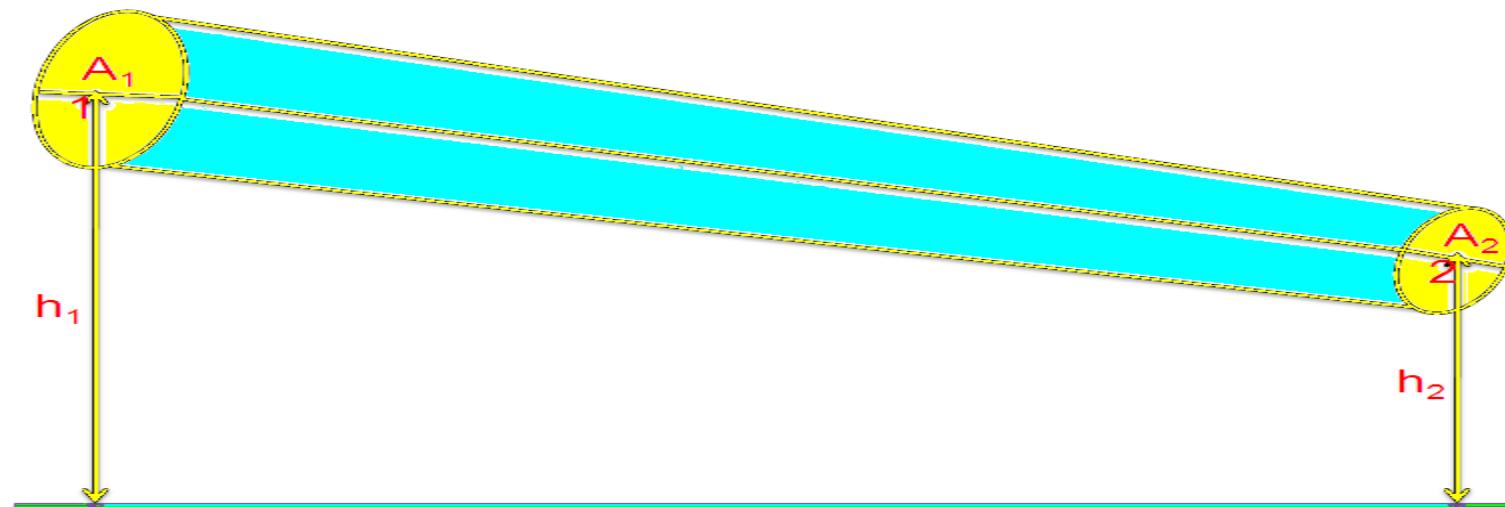
$$V_2 = A_1 V_1 / A_2 = 0.0314 \times 1 / 0.002 = 15.5 \text{ m/S}$$

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gh_2$$

$$(5 \times 10^5 / 1000) + 0.5(1)^2 + 5 \times 9.8 = (P_2 / 1000) + 0.5(15.5)^2 + 3 \times 9.8$$

$$P_2 = 3.97 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

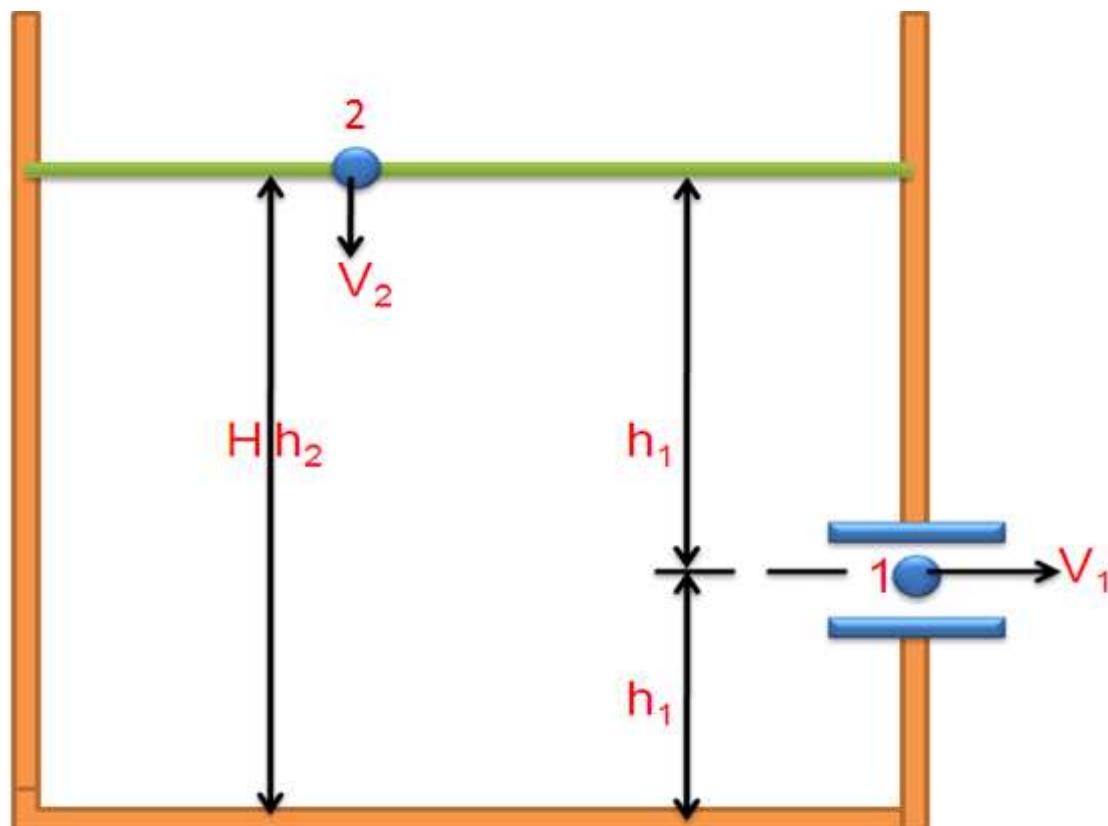
بتطبيق معادلة برنولي على المقطعين 1 و 2:



معادلة تورشلي: Torricelli's Equation

يبين الشكل الآتي وعاء يحتوي على سائل يتدفق من فتحة في الوعاء الذي يحتويه وعلى عمق h من سطح السائل. فإذا أخذنا النقطتين 1 و 2 تقع النقطة الأولى في وسط الفتحة والنقطة الثانية في سطح السائل. إن قيمة الضغط المسلط على النقطتين يساوي الضغط الجوي Pa ، والسبب في ذلك إنهما معرضتان للضغط الجوي. فإذا كان مقطع الوعاء كبيراً مقارنة بمقاطع الفتحة، فإن سرعة تدفق الماء من الفتحة تكون كبيرة مقارنة بسرعة انخفاض سطح السائل داخل الوعاء. فعند إهمال سرعة انخفاض السائل، وتطبيق معادلة برنولي على هاتين النقطتين، نحصل على:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gh_2$$



وبإهمال V_2 نسبة إلى V_1 ويساوي الضغط الجوي والذي يحذف من الطرفين نحصل:

$$\frac{1}{2} \rho V_1^2 = \rho g h_2 - \rho g h_1$$

وبما أن $h = h_2 - h_1$, إذن:

$$V_1^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2gh$$

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$

وهذه النتيجة تعني أن سرعة تدفق السائل تساوي السرعة التي يكتسبها جسم ساقط بصورة حرة من السكون ومن ارتفاع مقداره h (ولكن لا يتأتى لأي سائل أن يكتسب هذه السرعة لأننا أهملنا لزوجة السائل كما إن خطوط مجرى الانسياب تضيق عند الفتحة ولا تكون متوازية مما يجعل السرعة أكبر من هذا). وتسمى هذه النتيجة أحياناً بمعادلة تورشلي.

مثال:

أنبوبة ماء قطرها 2cm تستخدم لمليء خزان حجمه 20L، فإذا استغرق مليء الخزان ساعة واحدة، احسب سرعة الماء عند خروجه من الأنبوبة. الحل:

$$V = 20L = 20 \times 10^{-3} m^3, \quad t = 1 h = 60 \times 60 s$$

$$R = 2 cm = 2 \times 10^{-2} m \quad r = R/2 = 0.01 cm$$

معدل التدفق الحجمي يعطى بـ :

$$Q = V/t \\ = 20 \times 10^{-3} / 60 \times 60 = 0.56 \times 10^{-5} m^3/s$$

وباستخدام معادلة الاستمرار

$$Q = AV$$

$$V = Q/A$$

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times (0.01 \times 0.01)$$

$$V = 0.018 m/S$$

الأنبوبة ذات الاختناق: Constricted Tube

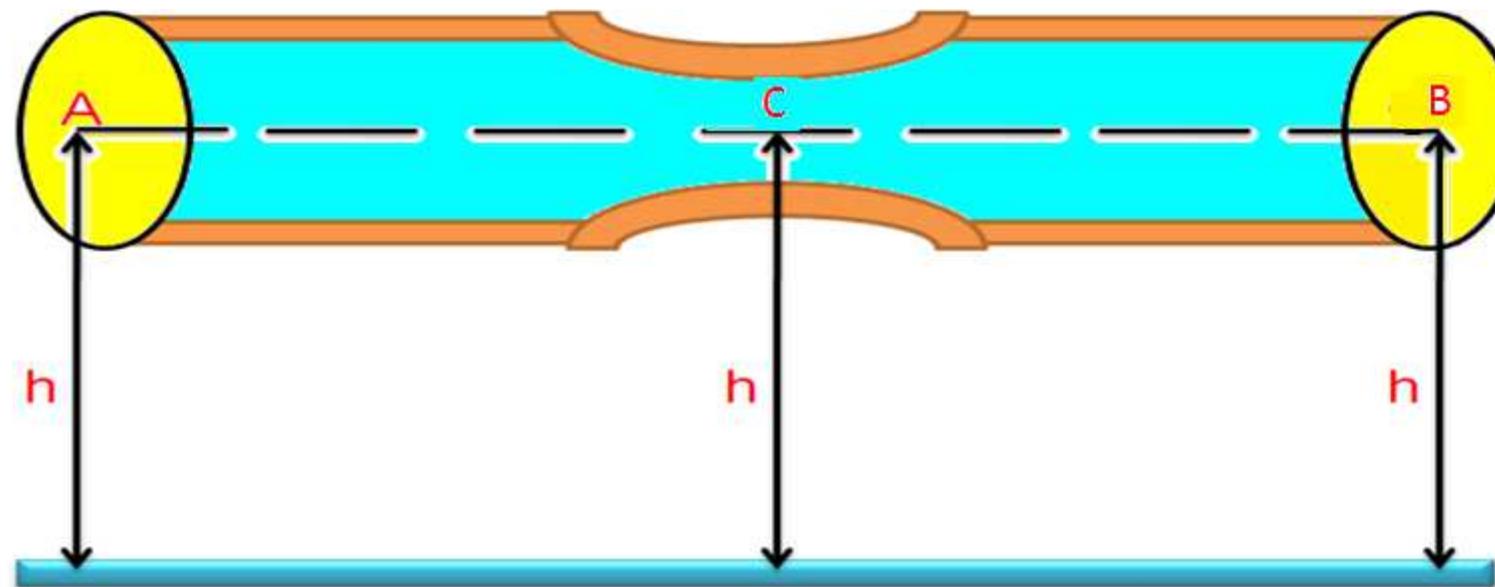
إذا انساب سائل في الأنبوة AB ذات اختناق عند C كما في الشكل أدناه، فان سرعته عند C تكون اكبر من سرعة السائل عند A أو B. بتطبيق معادلة برنولي:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gh_2$$

حيث أن V_1, P_1, h_1 هم ارتفاع السائل ، ضغط السائل وسرعة السائل على الترتيب عند النقطة A. V_2, P_2, h_2 هم ارتفاع السائل ، ضغط السائل وسرعة السائل على الترتيب عند النقطة C. وحيث أن $h_2 = h_1$ لأن الأنبوة أفقية. إذن:

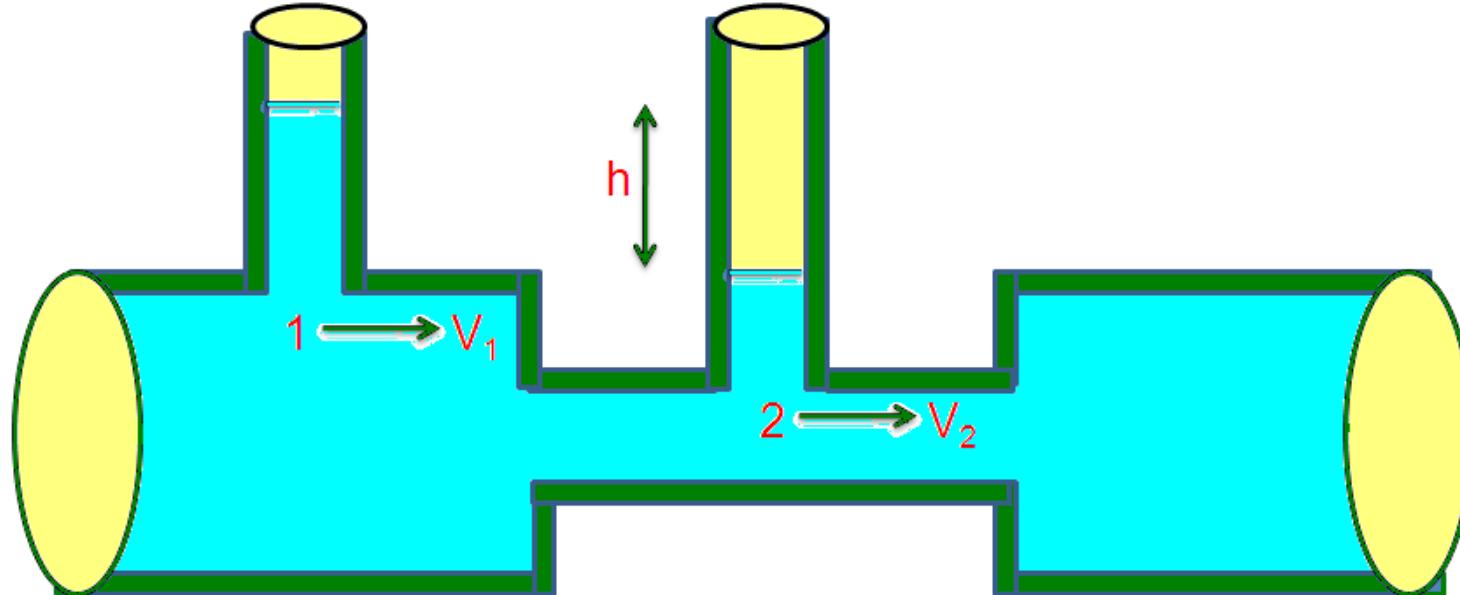
$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$

وحيث أن $V_1 > V_2$ ، إذن $P_1 > P_2$ أي أن ضغط السائل عند المقطع الواسع تكون اكبر من ضغطه عند الاختناق حيث سرعته اكبر، أي انه عند الاختناق تكون السرعة اكبر والضغط اقل.



Venturi Mater: مقاييس فنتوري

يعد مقاييس فنتوري تطبيقاً مباشراً لمعادلة برنولي، ويكون من أنبوبة أفقية تحتوي على تخصير (اختناق) كما في الشكل أدناه. والأنبوبتان الشاقولييان تقيسان فرق الضغط بين المقطعين. يجب أن يكون الأنبوبان متساوين في المقطع. وعند تطبيق معادلة برنولي على المقطعين 1 و 2 نحصل على:



$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gh_2$$

$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$
(1)

إذا كان فرق مستوى السائل بين الأنبوبتين الشاقوليتيين مساوياً إلى h فإن فرق الضغط سيكون مساوياً إلى P_{pg} , أي أن:

$$P_1 - P_2 = \rho gh$$

من معادلة الاستمرارية:

$$\begin{aligned} A_1 V_1 &= A_2 V_2 \\ V_2 &= A_1 V_1 / A_2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} V_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$

$$V_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)} A_2^2$$

$$V_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \tag{3}$$

وبما أن حجم السائل المار في الثانية يساوي:

$$Q = A_1 V_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \tag{3}$$

تعطي المعادلة (3) سرعة سريان السائل كما تعطي المعادلة (4) حجم السائل المار في الثانية الواحدة خلال أي مقطع من مقاطع الأنبوبة. يمكن حساب $(P_1 - P_2)$ من قراءة المانومتر:

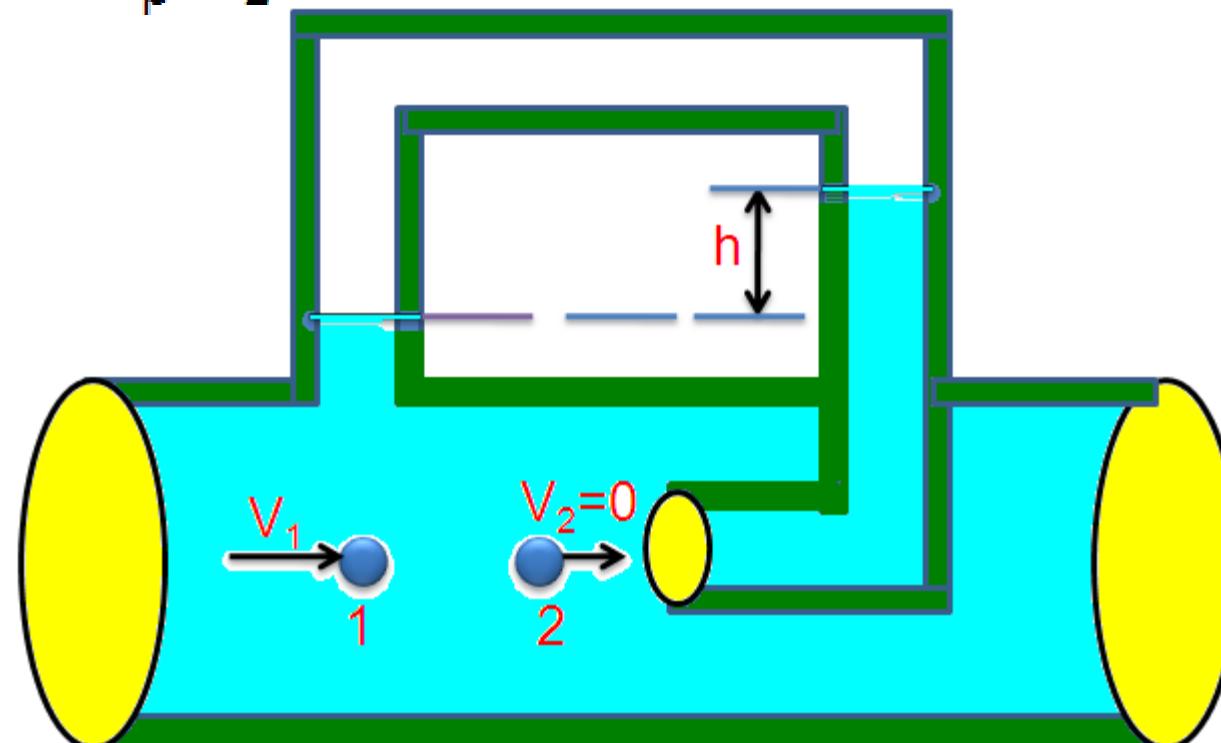
$$(P_1 - P_2) = h(\rho - \rho')$$

حيث تمثل ρ' كثافة السائل في المانومتر.

أنبوبة بيتوت: Pitot Tube

تستخدم أنبوبة بيتوت لقياس سرعة الغاز الذي يمر في أنبوبة كما يستخدم لقياس سرعة الرياح وقياس سرعة الطائرات بالنسبة للهواء. يتكون هذا الجهاز من أنبوبتين أحداهما واسعة المقطع يجري فيها الغاز بسرعة V والأنبوبة الأخرى ذات مقطع صغير في نهايتها، وتنصل الأنبوابتان بمضغاط سائل (مانومتر). الشكل أدناه يوضح مخططها لهذا الجهاز. فعندما يصطدم الغاز بالنهاية المدببة لأنبوبة الرقيقة فإن سرعته تصبح صفرًا. فعند تطبيق معادلة برنولي على المقطعين 1 و 2 نحصل على:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gh_2$$



و بما أن $V_2=0$ إذن:

$$(P_2 - P_1) = \frac{1}{2} \rho V_1^2$$

أي أن:

$$V_1^2 = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}$$

يطلق على $(P_2 - P_1)$ بالضغط السكوني والحركي (الديناميكي) على التوالي ويساوي:

$$(P_2 - P_1) = \rho gh$$

وهذا يعني:

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$

وعند قراءة قيمة الفرق في الارتفاع h في المانومتر يمكن إيجاد قيمة V_1 المساوية لسرعة الغاز. وإذا كانت A هي مساحة مقطع الأنبوبة فإن حجم السائل (الغاز) المار في الأنبوبة الثانية يساوي:

$$Q = A_1 V_1 = A \sqrt{2gh}$$

في حالات كثيرة يحدث اضطراب في السريان مما يحدث تغيراً في مقدار واتجاه سرع جسيمات السائل وينتتج عن ذلك إن قراءة الجهاز أكبر من اللازم وعلى ذلك يجب تعديل المعادلة السابقة كالتالي:

$$V_1 = C \sqrt{2gh}$$

حيث C ثابت يسمى معامل أنبوبة بيتوت وهو أقل من الواحد الصحيح وتتراوح قيمته بين (1 إلى 0.97).