المحاضرة الثالثة

* **The wave equation for φ is derived by**:

اشتقاق معادلة الموجه بدلالة متجه الجهد العددي **φ**

We have $\nabla \cdot D = \rho$ ………….. (1)

$E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$ ……….(2)

$D = \epsilon E$ ……………(3)

Sub. Equation (3) in equation (1) we get:

$\epsilon \nabla \cdot E = \rho$ ………………(4)

Sub. Equation (2) in equation (4) we get:

$\epsilon \nabla \cdot (-\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}) = \rho \Rightarrow -\nabla^2 \varphi - \frac{d}{dt}(\nabla \cdot A) = \frac{\rho}{\epsilon}$

$\nabla^2 \varphi + \frac{d}{dt}(\nabla \cdot A) = -\frac{\rho}{\epsilon}$ ………..(5)

For lorentz conditio $\nabla \cdot A = -\epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ …………(6)

Sub. Equation (6) in equation (5) we get:

$\nabla^2 \varphi + \frac{d}{dt}(-\epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$

$\boxed{\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$ …………..(7)

المعادلة (7) تمثل معادلة الموجه بدلالة الجهد الامتجه **φ** وهي معادلة غير متجانسة ايضا لوجود الحد الذي يحوي **ρ** وهو يمثل مصدر المجال.

* Electromagnetic energy: الطاقة الكهرومغناطيسية

The energy density in an electric field is:

$W_E = \frac{1}{2}\int_v E \, . D$ d v ……….(1)

The energy density in an magnetic field is:

$W_M = \frac{1}{2}\int_v H \, . B$ d v ……….(2)

We have from Maxwell's equations (1) and (2):

$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ ……..(3) $*$ E . $\Longrightarrow$ $E \, . (\nabla \times H) = E \, . J + E \, . \frac{\partial D}{\partial t}$ …………(5)

$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ ………..(4) $*$ H . $\Longrightarrow$ $H \, . (\nabla \times E) = -H \, . \frac{\partial B}{\partial t}$ ………………..…(6)

Subtracting Equation (5) from equation (6) we get:

$H \, . (\nabla \times E) - E \, . (\nabla \times H) = -H \, . \frac{\partial B}{\partial t} - E \, . \frac{\partial D}{\partial t} - E \, . J$ ………………….(7)

يمكن تحوير الطرف الايسر من المعادلة (7) الى تباعد بأستخدام المتطابقة الاتية:

div (A ×B) = B. curl A – A. curl B

فينتج

$\text{div}(E \times H) = -H \, . \frac{\partial B}{\partial t} - E \, . \frac{\partial D}{\partial t} - E \, . J$ ……………….(8)

اذا كان الوسط المادي لتطبيق المعادلة (8) وسطا خطيا اي اذا كان (D) متناسبا مع (E) وكان (B) متناسبا مع (E) فأن مشتقات الزمن من المعادلة (8) يمكن كتابتها كالاتي:

$\boxed{E \, . \frac{\partial D}{\partial t}} = E \, . \frac{\partial}{\partial t} \epsilon E = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial}{\partial t} E^2 = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2} E \, . D$ $\boxed{D = \epsilon E}$

$\boxed{H \, . \frac{\partial B}{\partial t}} = H \, . \frac{\partial}{\partial t} \mu H = \frac{1}{2}\mu \frac{\partial}{\partial t} H^2 = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2} H \, . B$ $\boxed{B = \mu H}$

و باستخدام هذه العلاقات فأن المعادلة (8) سوف تاخذ الصيغة الاتية:

$$\text{div}\,(E \times H) = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(E\,.\,D + H\,.\,B)}_{(1)} - \underbrace{J\,.\,E}_{(2)} \;\ldots\ldots\ldots(9)$$

الحد رقم (1) يمثل مشتقة الزمن لمجموع لمجموع كثافة الطاقة الكهربائية و المغناطيسية ، الحد رقم (2) يمثل المقدار السالب للطاقة الحرارية المبددة (حرارة جول).

بأخذ التكامل حول حجم ثابت (V) محدد بالسطح (s) نحصل على:

$$\int_v div\,(E \times H)\,d\,v = -\frac{\partial}{\partial t}\int_v \frac{1}{2}(E\,.\,D + H\,.\,B)\,d\,v - \int_v J\,.\,E\,d\,v \;\ldots\ldots(10)$$

وبتطبيق نظرية التباعد على الطرف الايسر للمعادلة (10) نجد:

$$\oint_s E \times H\,.\,n\,d\,a = -\frac{\partial}{\partial t}\int_v \frac{1}{2}(E\,.\,D + H\,.\,B)\,d\,v - \int J\,.\,E\,d\,v \;\ldots\ldots\ldots\ldots.(11)$$

وبأعادة كتابة هذه المعادلة (11) بالصيغة الاتية:

$$-\int J\,.\,E\,d\,v = \frac{\partial}{\partial t}\int_v \frac{1}{2}(E\,.\,D + H\,.\,B)\,d\,v + \oint_s E \times H\,.\,n\,d\,a \;\ldots\ldots\ldots\ldots.(12)$$

التكامل E×H حول سطح مغلق يمثل المعدل الزمني للطاقة الكهرومغناطيسية المخترقة للسطح المغلق.

المتجه E×H يعرف بمتجه (pointing vector) وعادة يرمز له بالرمز (s) وبهذا فأن المعادلة (12) تجسد قانون ضغط الطاقة في حجم ثابت v .

$$\boxed{\therefore s = E \times H} \quad \text{or} \quad \boxed{B = \mu H} \quad \therefore \quad \boxed{\therefore s = \frac{1}{\mu} \times H\,(E \times B)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

* The wave equation: معادلة الموجة

One of the most important applications of Maxwell's equations is their use in driving electromagnetic wave equations.

من اهم تطبيقات معادلات ماكسويل هو استخدامها في اشتقاق معادلات الموجات الكهرومغناطيسية.

* Deriving the wave equation in terms (H):

*** اشتقاق معادلة الموجة بدلالة (H) :**

Maxwell's curl equations are:

$$J = \sigma E$$

$$D = \epsilon E$$

$$B = \mu H$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Taking the curl of (1):

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \sigma (\nabla \times E) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Sub. Equation (2) in equation (3) we get:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = -\mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

By using the identity: بأستخدام المتطابقة الاتية

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla (\cancelto{0}{\nabla \cdot H}) - \nabla^2 H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

By equal (5) , (4) we get:

$$\boxed{\nabla^2 H = \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

* Deriving the wave equation in terms (E):

*** اشتقاق معادلة الموجة بدلالة (E) :**

يحقق المتجه (E) معادلة الموجة نفسها كما يتبين من اخذ التفاف المعادلة (2):

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H) \ldots\ldots\ldots(3)$$

Sub. Equation (1) in equation (3) we get:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}\right) \ldots\ldots\ldots(4)$$

By using the identity: بأستخدام المتطابقة الاتية

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla (\cancelto{0}{\nabla \cdot E}) - \nabla^2 E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

By equal (5) , (4) we get:

$$\boxed{\nabla^2 E = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t}} \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$