

الفصل الاول

الأسس الفيزيائية للميكانيك الكمي

ميلاد النظرية الكمية **The Dawn of the Quantum Theory**

في نهاية القرن التاسع عشر، اعتقد كثير من العلماء أن كل الاكتشافات العلمية قد تم إنجازها وفهمها وأنه لم يبقى إلا بعض المسائل البسيطة التي تحتاج لمزيد من الإيضاح. إن هذه القناعة وكانت ناشئة من التقدم العلمي في مجالات شتى والذي تمثل - على سبيل المثال - في ميكانيكا نيوتن Newton والتي طُورت بواسطة العالمان لاجرانج وهاملتون J. LaGrange and W. Hamilton. حيث تم استخدام هذه النظرية لوصف حركة الكواكب وكذلك فهم كثير من الظواهر المعقدة مثل نظرية المرونة elasticity theory وديناميكا الموائع hydrodynamic إنجازات العالم جول وبيان تكافؤ الشغل والحرارة، أبحاث كارنوت Carnot والتي أدت لفهم الإنتروبي والقانون الثاني للديناميكا الحرارية، وما يتبع هذه الأبحاث من تطوير على يد العالم جيبس J. Gibbs لإرساء أسس علم الديناميكا الحرارية.

وشهدت مجالات أخرى من الفيزياء (مثل الضوء والنظرية الكهرومغناطيسية optics and electromagnetic theory) إنجازات ملحوظة. فمثلاً، الاستنتاجات الهامة التي توصل إليها العالم ماكسويل J. Maxwell متمثلة بمعادلاته الشهيرة "والبسيطة" والتي وَحَدَّت مجالات الضوء والكهربية والمغناطيسية وما يتبع هذه الأبحاث من التجارب العملية بواسطة العالم هيرتز H. Hertz في عام 1887 والتي أدت إلى إثبات الطبيعة الموجبة للضوء.

كل هذه الإنجازات في المجالات المختلفة للفيزياء كوَّنت ما يُعرف الآن بالفيزياء التقليدية Classical physics ومع بداية القرن العشرين، وُجدت بعض النتائج التجريبية الجديدة والتي استلزم تفسيرها مفاهيم فيزيائية جديدة تتناقض مع مبادئ الفيزياء الجديدة ولد ما يسمى الآن بالنظرية الكمية quantum theory وسنحاول في هذا الفصل أن نصف خلفية هذه الأزمات لنصل من خلالها لمعرفة النظرية الكمية.

ويمكننا تلخيص المفاهيم الفيزيائية الجديدة في: الخواص الجسيمية للإشعاع the particle properties of radiation، الخواص الموجية للمادة the wave properties of matter، وتكميم الكميات الفيزيائية the quantization of physical quantities. وسنقوم في هذا الفصل بمناقشة هذه المفاهيم.

1-1. إشعاع الجسم "الأسود"

1-1 Blackbody Radiation

- الفيزياء التقليدية لم تتمكن من شرح إشعاع الجسم الأسود

- Blackbody Radiation could not be explained by classical physics

من أهم النتائج التجريبية التي أحدثت ثورة في المفاهيم الفيزيائية التقليدية تلك المتعلقة بالإشعاع الصادر من الأجسام عند تسخينها. فمن المعلوم عند تسخين جسم ما، نجد أن لونه يتغير مع زيادة درجة الحرارة حيث يبدأ بالأحمر ثم الأبيض ثم الأزرق. وبدلالة التردد، نقول أن الإشعاع المنبعث من هذا الجسم يبدأ بترددات منخفضة، وعند ارتفاع درجة الحرارة، تزداد الترددات، حيث أن اللون الأحمر ذو تردد قليل في منطقة طيف الإشعاع وذلك مقارنة باللون الأزرق. إن طيف التردد للإشعاع المنبعث من جسم ما يعتمد على طبيعة الجسم نفسه، ولكن الجسم المثالي deal body، والذي يمتص أو يبعث كل الترددات

يُسمى بالجسم الأسود ويعتبر حالة مثالية لأي مادة تُصدر إشعاع. الإشعاع المنبعث من "جسم أسود" يسمى إشعاع الجسم الأسود.

an ideal body, which absorbs and emits all frequencies, is called a blackbody and serves as an idealization for any radiating material, the radiation emitted by a blackbody is called blackbody radiation.

شكل 1-1 يوضح تغير شدة الإشعاع الصادر من جسم أسود مع التردد وذلك عند درجات حرارة مختلفة. وقد حاول العديد من الفيزيائيين استنتاج معادلة رياضية تشرح النتائج التجريبية (في شكل 1-1) ولكن بدون توافق كامل وأولى المحاولات لوصف هذه النتائج قام بها كل من العالمين رالي وجينز Rayleigh and Jeans والتي اشتقت بناءً على قوانين القرن التاسع عشر ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصيغة:

$$u(\nu, T) = \frac{8\lambda K_B T}{C^3} \nu^2 \quad (1-1)$$

حيث $u(\nu, T)$ كثافة الطاقة energy density ووحدتها جول لكل متر مكعب (J/m^3). في المعادلة (1-1)، T درجة الحرارة بالكيلفن، c سرعة الضوء، K_B ثابت بولتزمان. الخط المتقطع في شكل 1-1 يبين العلاقة حسب معادلة رالي-جينز. لاحظ التوافق بين هذه العلاقة والنتائج التجريبية عند الترددات المنخفضة. عند الترددات العالية، وحسب معادلة رالي-جينز، فإن كثافة الإشعاع تزداد طبقاً لـ ν^2 وتصل إلى ما لا نهاية وذلك عندما تصل الترددات إلى ما لا نهاية وهذا يحدث في منطقة الأشعة فوق البنفسجية ultraviolet وهذا ما يعرف بالانهيار فوق بنفسجي ultraviolet catastrophe. من المعادلة (1-1) ولكل الترددات من صفر إلى ما لا نهاية.

$$\int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{8\lambda k_B T}{C^3} \nu^2 d\nu \rightarrow \infty$$

وهذه النتيجة تتناقض مع النتائج التجريبية حيث أن شدة الإشعاع تزداد مع زيادة التردد لتصل إلى أقصى قيمة عند تردد معين نرسم له بـ ν_{\max} ثم تقل إلى الصفره هذا يعني أن قيمة التكامل لا تساوي مالا نهاية. ومن الجدير بالذكر كذلك ملاحظة أن ν_{\max} تتغير مع تغير درجة الحرارة كما هو موضح بالشكل.

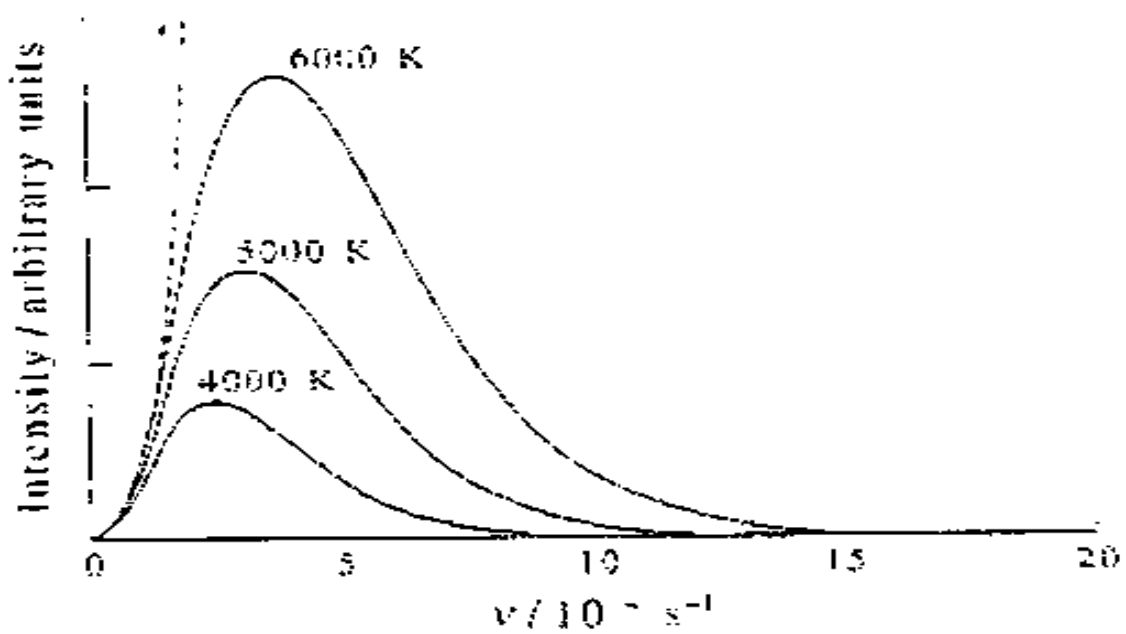


FIGURE 1.1

Spectral distribution of the intensity of blackbody radiation as a function of frequency for several temperatures. The intensity is given in arbitrary units. The dashed line is the prediction of classical physics. As the temperature increases, the maximum shifts to higher frequencies and the total radiated energy (the area under each curve) increases significantly. Note that the horizontal axis is labeled by $\nu/10^{14} \text{ s}^{-1}$. This notation means that the dimensionless numbers on that axis are frequencies divided by 10^{14} s^{-1} . We shall use this notation to label columns in tables and axes in figures because of its unambiguous nature and algebraic convenience.

كيف تم حل هذا الإشكال بين النظرية والتجارب العملية؟

1-2 توزيع بلانك وتكميم الطاقة

1-2 The Planck Distribution and the Quantum of Energy

إن أول من قدم تفسير صحيح لإشعاع الجسم الأسود هو العالم الألماني ماكس بلانك Max Planck في عام 1900. وفي نظريته، افترض بلانك أن الإشعاع المنبعث من الجسم الأسود من اهتزاز الإلكترونات المكونة لمادة الجسم. ولكون هذه الاهتزازات ذات ترددات عالية فإننا نجد في طيف الإشعاع المنبعث ترددات في منطقة الضوء المرئي والأشعة تحت الحمراء وفوق البنفسجية بينما لا نجد أي من ترددات الراديو في هذا الطيف. طبقاً لنظرية رالي-جينز، فإنه مفهوم ظناً أن طاقة الإلكترونات المهتزة، والتي هي سبب تبعث الإشعاع من المادة- مسموح لها أن تأخذ أي قيمة من الطاقة. وهذه الفرضية هي إحدى الأساليب للفرضية في الفيزياء التقليدية. في الفيزياء التقليدية، الكميات الفيزيائية المتغيرة والتي تمثل مشاهدات (مثل المواقع Position، كمية الحركة Momentum و الطاقة energy) يمكن تملك قيم متصلة.

In classical physics, the variables that represent observables (such as position, momentum and energy) can take on a continuum of values.

ولقد أدرك العالم بلانك - بعمق تفكيره - بضرورة إحداث تغيير جذري

وجوهري في هذا المفهوم الفيزيائي فكانت فرضيته الانقلابية في الفيزياء الحديثة: طاقة الإلكترونات المهتزة كممة وقيمها غير متصلة وتتناسب برقم

كمي صحيح مع التردد وذلك من خلال المعادلة $E=nh\nu$

حيث E هي طاقة المنتذب، n هو رقم صحيح، h ثابت التاسب ويُعرف بثابت بلانك، و ν هو تردد المنتذب.

وبناءً على مبدأ تكيم الطاقة ومفاهيم ديناميكا حرارية إحصائية، تمكن بلانك من استنتاج العلاقة الرياضية التالية:

$$u(\nu, T) = \frac{8\lambda h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (1-2)$$

وهذه العلاقة تتفق تماماً مع النتائج للتجريبية عند كل الترددات ودرجات الحرارة للمعادلة (1-2) تُعرف بتوزيع بلانك لإشعاع الجسم الأسود

Planck distribution lance for black body radiation.

(i) عند الترددات المنخفضة، تؤول معادلة بلانك إلى معادلة رالي-جينز بالنظر

$$\text{إلى النسبة } \frac{h\nu}{k_B T} \text{ فعندما تكون } \nu \text{ صغيرة فإن } 1 \ll \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\text{من مكون تولور الدالة الأسية } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

إذا كانت ν صغيرة، يمكننا إهمال الحدود ذات الأسس العليا وحلوه $e^x \approx 1 + x$ وذلك إذا كانت $x \ll 1$ في هذه الحالة يمكننا كتابة معادلة بلانك

$$u(\nu, T) = \frac{8\lambda h}{c^3} \frac{\nu^3}{1 + \frac{h\nu}{k_B T}} = \frac{8\lambda h}{c^3} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{k_B T}}$$

$$u(\nu, T) = \frac{8\lambda}{c^3} K_B T \nu^3 \quad (1-3)$$

وهذه هي معادلة رالي-جينز.

(ii) لطاقة كلية

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \frac{8\lambda h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

ولإجراء هذا التكامل نعوض عن $\nu = \frac{h\nu}{k_B T}$ ، هذا يعني أن $d\nu = \frac{h}{k_B T} d\nu$

ويمكننا كتابة $d\nu$ بدلالة $d\nu$ و $d\nu = \frac{k_B T}{h} d\nu$. حدود التكامل لم تتغير، بالتعويض عن ν بـ $\frac{k_B T}{h} \nu$ وكذلك $d\nu$ بدلالة $d\nu$ نتحصل على

$$u(\nu, T) = \frac{8\lambda h}{c^3} \int_0^\infty \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} \left(\frac{k_B T}{h}\right) d\nu$$

$$= \frac{8\lambda h}{c^3} \int_0^\infty \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu = \frac{8\lambda h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu$$

التكامل $\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu$ قيمته تساوي $\frac{\pi^4}{15}$

$$\therefore u(T) = \frac{8\lambda h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \frac{8\lambda^4}{15c^3} \left(\frac{k_B}{h}\right)^4 T^4$$

$$= aT^4 \dots \dots \dots (1-4)$$

$$a = \frac{8\lambda^4}{15c^3} \left(\frac{k_B}{h}\right)^4 \quad \text{حيث:}$$

1-3 The Photoelectric Effect

3-1 التأثير الكهروضوئي

في عام 1886، 1887 وبينما كان يجري تجاربه التي أكدت نظرية ماكسويل الخاصة بالطبيعة الموجية للضوء، اكتشف الفيزيائي الألماني هيرتز Heinrich Hertz أن الأشعة الضوئية للفوق بنفسجية ultraviolet light تسبب انطلاق (تبعث) الإلكترونات من سطح معدن بالإشعاع يسمى بالتأثير الكهروضوئي.

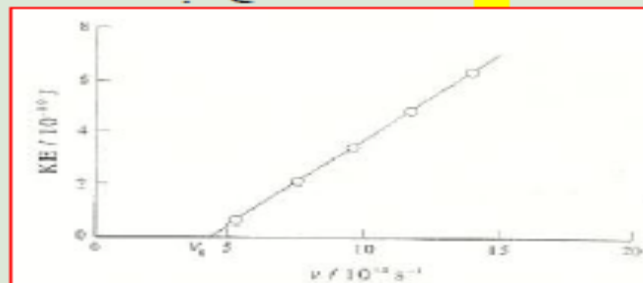
وطبقاً لقوانين الفيزياء الكلاسيكية، فإن الإشعاع الكهرومغناطيسي عبارة عن مجال كهربائي يتذبذب صوتياً على اتجاه تبعث الإشعاع (هنا أمثلاً للمجال المغناطيسي). والذي تريد أن تركز عليه هنا أن شدة الأشعة intensity of the radiation تتناسب مع مربع سعة المجال الكهربائي.

The intensity of the radiation is proportioned to the square of the amplitude of the oscillating electric field.

ويمكن للإلكترونات التي على سطح المعدن أن تتذبذب مع المجال الكهربائي للساقط عليها، وكلما زادت شدته (سعته) تزداد سعة تذبذب الإلكترونات كثيراً مما يؤدي في النهاية إلى كسر ارتباطها بالسطح وانطلاقها بطاقة حركية kinetic energy والتي ستعتمد على سعة (شدة) المجال الكهربائي للإشعاع الساقط. إن هذا للتفسير الفيزيائي (الكلاسيكي) يتعارض تماماً مع المشاهدات الفيزيائية لهذه الظاهرة والتي تمثلت في:

1- وُجد أن الطاقة الحركية للإلكترونات المنبعثة من السطح لا تعتمد على شدة الاثبعث independent of the intensity of incidental.

2- وجد تجريبياً أن الإلكترونات لا تبعث من السطح إلا إذا كان تردد الإشعاع الساقط أكبر من تردد معين ν . بغض النظر عن شدة الإشعاع سنسمي هذا التردد ν بعتبة للتردد threshold frequency وقيمة ν تعتمد على نوع المعدن. وكذلك وجد أن الطاقة الحركية للإلكترونات المنبعثة تتناسب خطياً مع التردد ν وذلك إذا كانت ν أكبر من ν كما هو موضح في شكل 1-4.



شكل 1-4: تغير قيم الطاقة الحركية للإلكترونات مع التردد.

والتفسير هذه النتائج، طور العالم اينشتاين فرضية بلانك من تكميم للطاقة. وهذا فنكر أن بلانك طبق مفهوم تكميم للطاقة فقط على المتذبذب الذي يمتص أو يبعث للطاقة (فإذا مصدر تردده ν فإنه يملك طاقة $E=h\nu$) أما إذا ما تبعث الإشعاع من هذا المتذبذب فإنه يساكي (كما اقترح بلانك) كموجة حادية تخضع للمفاهيم الفيزيائية التقليدية. أما للعالم اينشتاين فقد ذهب إلى ما هو أبعد من هذا، فقال إن التكميم لا ينطبق فقط على المتذبذب بل إن الإشعاع المنبعث منه يتبعث كمات من الطاقة (أو حزم من الطاقة) منفصلة عن بعضها وطاقة كل كم $E=h\nu$ وأطلق اسم الفوتون photon عليه.

Einstein proposed that the radiation itself existed as small packets of energy, $E=h\nu$, now known as photons.

وبناءً على مبدأ حفظ الطاقة Conservation of energy، وضع اينشتاين أن الطاقة الحركية $KE=\frac{1}{2}mv^2$ (التي يتبعث بها الإلكترون ذو الكتلة m والسرعة v) من سطح المعدن عبارة عن الفرق بين الطاقة المساقطة للفوتون $h\nu$ وكل طاقة لازمة لنزع الإلكترون (وتحريره) من طاقة ربطة بالمعدن W (ويرمز لها أحياناً بـ ϕ) والتي تسمى دالة للشغل Work function.

ويمكننا صياغة ما سبق ذكره بالمعادلة التالية:

$$KE=\frac{1}{2}mv^2=h\nu-\phi \quad (1-5)$$

لاحظ أن قيمة $\frac{1}{2}mv^2$ موجبة وحده فالفرق $h\nu-\phi$ لا يمكن أن يكون سالب. أي أنه $h\nu \geq \phi$. إن أقل قيمة لـ $h\nu$ هي الطاقة اللازمة لتحرير الإلكترون من ربط للنواة وهذا يحدث عن حتبة للتردد ν أي أن:

$$h\nu_c = \phi \quad (1-6)$$

ويمكننا كتابة معادلة (1-5) على الصورة.

$$\frac{1}{2}mc^2 = hv - hv_0 \quad (1-7)$$

وهذه معادلة خط مستقيم (على الصورة $y = mx - c$) وهو تماماً ما يشاهد من النتائج التجريبية الموضحة في شكل 1-5.

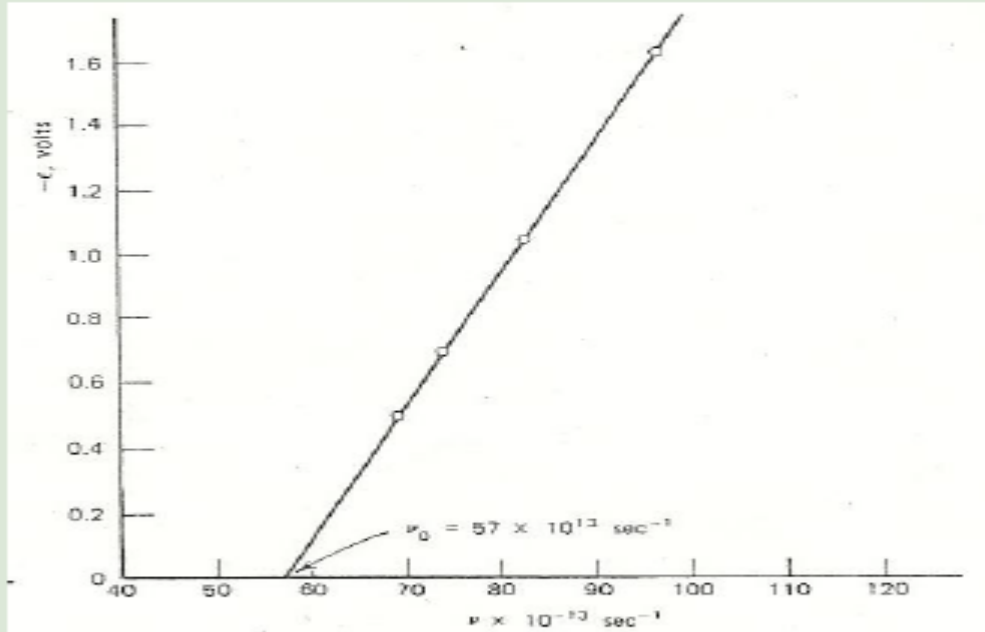


Figure 1-5. Photoelectric effect data showing a plot of retarding potential necessary to stop electron flow from a metal (lithium), or equivalently, electron kinetic energy, as a function of frequency of the incident light, the slope of the line is h/e .

1-4 تغير كومبتون:

1-4 The Compton Effect

التجربة التي تؤكد بوضوح للطبيعة للجسيمية للإشعاع the particle nature of radiation تسمى بتأثير (ظاهرة) كومبتون نسبة للعالم كومبتون Arthur H. Compton لقد اكتشف كومبتون أنه إذا اخترق إشعاع ذو طول موجي (في منطقة الأشعة السينية X-ray) شريحة معدنية فسيبعثر scattered بطريقة لا يمكن تصورها حسب النظرية الكلاسيكية للإشعاع.

الذي تخبرنا به قولتين العزباء التقلبية أن شدة الإشعاع I المنبعث من مادة نتيجة تثرها بإشعاع سقط عليها (مما يؤدي إلى اهتزاز إلكتروناتها والتي بدورها ستبعث إشعاع) عندما تقلس حد زلوية θ (بالنسبة لاتجاه الأشعة الساقطة) فإن I تتغير مع θ حسب للعلاقة

$$I \approx (1 + \cos^2 \theta)$$

(1-8)

وهذا يعني أن I لا تعتمد على الطول الموجي للأشعة الساقطة، وهذا يتعارض بوضوح مع النتائج التجريبية (شكل 1-6) والتي يتبين بوضوح تغير I بتغير λ .

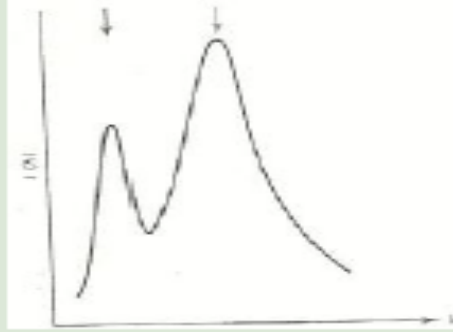


Figure 1-6. The spectrum of radiation scattered by carbon, showing the unmodified line at 0.7078 \AA on the left and the shifted line at 0.7314 \AA on the right. The former is the wave-length of the primary radiation.

نتائج تجربة كومبتون:

لقد وجد كومبتون أن الإشعاع المتبعثر له مركبتين؛ مركبة طولها للموجي مسلو طول موجة الإشعاع الساقط ومركبة أخرى تختلف في طولها للموجي عن الطول للموجي للإشعاع الساقط وتعتمد على زاوية البعثرة وقد تمكن كومبتون من شرح وجود مركبة الإشعاع المتبعثرة ذات الطول للموجي المختلف عن الطول للموجي الساقط وذلك باختيار الإشعاع الساقط عبارة عن شعاع من الفوتونات بطاقة $h\nu$ حيث يعطي كل فوتون من تبعثر (نشفت) مررن elastic scattering مع كل إلكترون.

وكما هو معلوم، في حالة النشفت المررن فإن كمية للحركة momentum والطاقة energy كميات تخضع لقانون الحفظ (البقاء) momentum and energy .must be conserved.

واتفسير هذه الظاهرة رياضياً، نفترض كومبتون أن الفوتون له كمية

حركة p تعطى بالعلاقة

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (1-9)$$

حيث تم اعتبار الحركة لديناميكية الفوتون كجسيم يخضع لقوانين النظرية

النسبية والتي توضح العلاقة بين الطاقة وكمية الحركة.

$$E = [(m_0 c^2)^2 + (pc)^2]^{1/2} \quad (1-10)$$

حيث m_0 هي الكتلة السكونية $rest\ mass$ للجسيم، وسرعة الجسيم v عند

كمية الحركة p تعطى بالعلاقة

$$\begin{aligned} v &= \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} [(m_0 c^2)^2 + (pc)^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} [(m_0 c^2)^2 + (pc)^2]^{-1/2} \frac{d}{dp} (pc)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{[(m_0 c^2)^2 + (pc)^2]^{1/2}} (pc)c \\ \therefore v &= \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{(m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}} \quad (1-11) \end{aligned}$$

في حالة الفوتون، نفرض عن $m_0 = 0$ و $v = c$ في معادلة (1-11)

$$\therefore c = \frac{pc^2}{E} \Rightarrow E = pc \quad (1-12)$$

من معادلة (1-12) نتحصل على معادلة (1-9) حيث $E = h\nu$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

دعنا نفترض الآن وجود فوتون بكمية حركة ابتدائية p ساقط على

إلكترون ساكن. وبعد الاتصال، نفترض أن كمية الحركة للفوتون p أما

الإلكترون فيحدث له ارتداد recoil بكمية حركة p_e وبتطبيق قانون بقاء كمية الحركة (انظر شكل 1-7).

$$\vec{p}_e = \vec{p}_i + \vec{p} \quad (1-13)$$

بتربيع طرفي المعادلة.

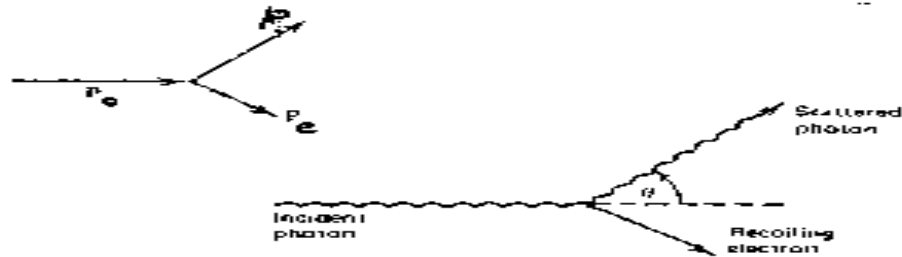


Figure 1-7. Kinematics for Compton effect.

$$\vec{p}_e^2 = \vec{p}_i^2 + \vec{p}^2 + 2\vec{p}_i \cdot \vec{p} \quad (1-14)$$

نطبق الآن قانون بقاء الطاقة

$$E = [m_e c^2 + (pc)^2]^{1/2} \text{ قبل للتصلب}$$

بالتعويض عن $m_e = 0$ لأن الإلكترون ساكن قبل للتصلب (لأن أن P

تسوي صفر).

$$\therefore E = m_e c^2 = mc^2 \quad (1-15)$$

قانون بقاء الطاقة: طاقة الإلكترون والفوتون لساقط قبل للتصلب = طاقة

الإلكترون والفوتون بعد للتصلب

$$h\nu_i + mc^2 = h\nu + (m^2 c^4 + p_e^2 c^2)^{1/2}$$

ننقل $h\nu$ للطرف الأيسر وتربيع طرفي المعادلة

$$(h\nu_i + mc^2 - h\nu)^2 = (m^2 c^4 + p_e^2 c^2)$$

or

$$m^2 c^4 + p_e^2 c^2 = (h\nu_i - h\nu + mc^2)^2 \\ = (h\nu_i - h\nu)^2 + 2mc^2 (h\nu_i - h\nu) + m^2 c^4$$

$$(1-16)$$

من معادلة (1-14)، وبالتعويض عن $p_i = \frac{h\nu_i}{c}$, $p = \frac{h\nu}{c}$

$$\therefore p_e^2 c^2 = \left(\frac{h\nu_i}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu_i}{c}\right)\left(\frac{h\nu}{c}\right)\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية للمحصورة بين اتجاه الشعاع للمشتت والشعاع

الساقط بضرب طرفي المعادلة في C^2

$$p_e^2 c^2 = (h\nu_i)^2 + (h\nu)^2 - 2(h\nu_i)(h\nu)\cos\theta \quad (1-17)$$

والحصول على مربع كامل، نضيف ونطرح $2h\nu_i h\nu$ لمعادلة (1-17)

$$p_e^2 c^2 = \frac{(h\nu_i)^2 + (h\nu)^2 - 2h\nu_i h\nu + 2h\nu_i h\nu - 2(h\nu_i)(h\nu)\cos\theta}{(h\nu_i - h\nu)^2}$$

$$\therefore p_e^2 c^2 = (h\nu_i - h\nu)^2 + 2h\nu_i h\nu (1 - \cos\theta) \quad (1-18)$$

بالتعويض عن قيمة $(h\nu_i - h\nu)^2$ من معادلة (1-18) في معادلة (1-18) نتحصل

على

$$m^2 c^4 + p_e^2 c^2 = p_e^2 c^2 + 2h\nu_i h\nu (1 - \cos\theta) + 2mc^2 (h\nu_i - h\nu) + m^2 c^4$$

(1-19) .. بحذف الحدود المتشابهة من طرفي المعادلة:

$$\begin{aligned}
2hv_0 hv (1 - \cos \theta) &= 2mc^2 (hv_0 - hv) - \\
&= 2mc^2 h (v_0 - v) \\
&= 2mc^2 h \left(\frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda} \right) 2mc^2 hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) \\
2h \frac{c}{\lambda_0} h \frac{c}{\lambda} (1 - \cos \theta) &= 2mc^2 h \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda}
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
2h^2 \frac{c^2}{\lambda_0 \lambda} (1 - \cos \theta) &= 2mc^2 h \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda} \\
h(1 - \cos \theta) &= mc(\lambda - \lambda_0)
\end{aligned}$$

$$\text{or } \boxed{\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)} \quad \dots(1-20)$$

لاحظ أن $\frac{h}{mc}$ في معادلة (1-20) له بُعد الطول وهذا للحد يُسمى طول

موجة كومبتون Compton wavelength للإلكترون ومقدره

$$\frac{h}{mc} \cong 2.4 \times 10^{-10} \text{ cm} \quad (1-21)$$

وقد تبين من القياسات المعمارية أن طول موجة الفوتون والامتصاصات λ تتطابق مع القيمة النظرية. أمّا للمركبة لثنائية λ (انظر شكل والذي يبين مركبتين λ إحداهما تختلف عن λ_0 والأخرى مساوية لـ λ_0) والتي لا تتغير بالنسبة فإن منشأها هو اتصال الفوتون للساقط مع الذرة ككل، فلو عوضنا عن m بكتلة الذرة (بدلاً من كتلة الإلكترون) وحيث أن هذه القيمة في المقام (وهي كبيرة جداً بالنسبة لكتلة الإلكترون) فإن الحد $\frac{h}{mc}$ ستكون قيمته صغيرة جداً قريبة من الصفر، أي أن $\lambda - \lambda_0 \cong 0$ وهذا يعني $\lambda \cong \lambda_0$ وأخيراً ما الذي نستنتجه من تأثير كومبتون؟

إن القياسات التي أُجريت على الإلكترون المرند والفوتون المبعثر منه تؤكد - بما لا يدع مجالاً للشك - وأن هذا للتصالح مماثل للتصالح الذي يحدث بين كرتي بيلاردو، أي أن الفوتون (أو الشعاع الساقط) يجب أن تتعامل معه على أسس أنه جسيم، وهذا يؤكد للطبيعة للجسيمية للإشعاع.