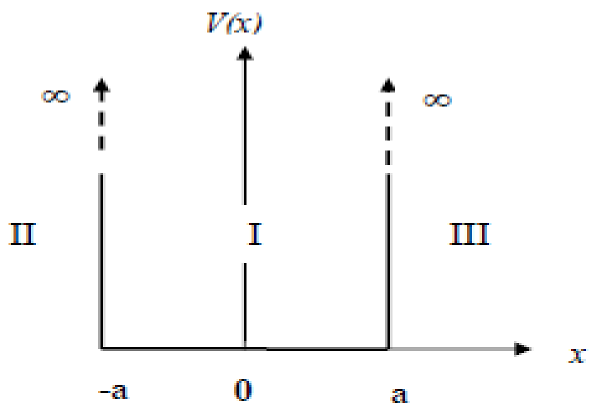
مثال: ادرس حركة جسيم في مجال جهد متماثل كما بالشكل ويوصف بالتالي:



$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| > a \end{cases}$$

وأثبت أن

$$\psi_I(x) = \begin{cases} A\sin(\frac{n\pi}{2a}x) & n \text{ is even} \\ \\ B\cos(\frac{n\pi}{2a}x) & n \text{ is odd} \end{cases}$$

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2, \quad A = B = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

نتيجة لقيم الجهد اللانهائية خارج المنطقة (I)، لذلك ينعدم تواجد الجسيم بالمنطقتين (II)، (III).
بالمنطقة (I) نجد أن معادلة شرودنجر غير الزمنية تأخذ الشكل:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_I}{dx^2} = E\psi_I$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\psi_I}{dx^2} = -k^2\psi_I, \qquad \textbf{(1)}$$

حيث $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. الحل العام للمعادلة (1) هو:

$$\psi_I(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \qquad (2)$$

حيث A و B ثوابت تعين من خلال الشروط الفيزيائية. من شروط انعدام الدالة عند الحدود (a) و $(-a)$ نجد أن:

$$\psi_I(a)=0 \quad \Rightarrow \quad A\cos(ka)+B\sin(ka)=0, \qquad (3)$$

$$\psi_I(-a)=0 \quad \Rightarrow \quad A\cos(ka)-B\sin(ka)=0 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (3) و (4) ينتج أن:

$$2A\cos(ka)=0$$
$$\Rightarrow \quad A=0 \ \text{ or } \ \cos(ka)=0 \qquad (5)$$

حيث n عدد صحيح زوجي. في النوع الثاني نجد أن:

$$\cos(ka)=0 \quad \Rightarrow \quad ka=\frac{\pi}{2},3\frac{\pi}{2},5\frac{\pi}{2},\cdots=n\frac{\pi}{2},$$

حيث n عدد صحيح فردي.

ات:

ومنه نصل إلى الخلاصة أن:

k

$$\psi_I(x)=\begin{cases} A\sin(\frac{n\pi}{2a}x) & n \text{ is even} \\ \\ B\cos(\frac{n\pi}{2a}x) & n \text{ is odd}\end{cases}$$

$$k_n^2=\frac{2mE_n}{\hbar^2}, \qquad \Rightarrow \qquad E_n=\frac{k_n^2\hbar^2}{2m}=n^2\underbrace{\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}_{E_1}=n^2E_1$$

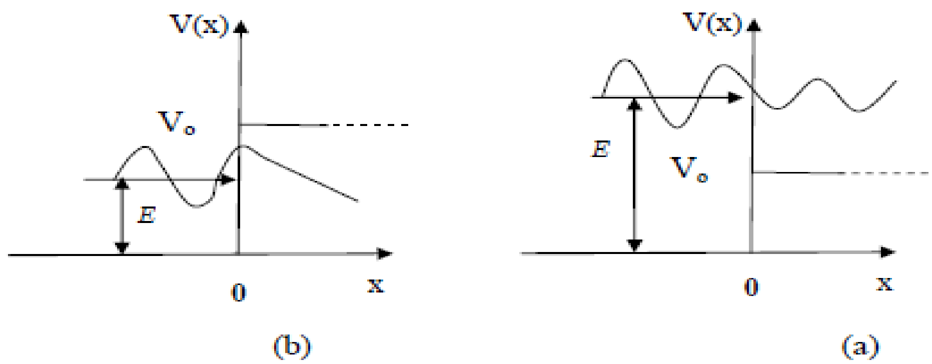
$$A=B=\sqrt{\frac{1}{a}}$$

III. الجهد الدرجي

دراسة حزمة متجانسة من الإلكترونات تتحرك في اتجاه حاجز جهد على الصورة:

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ V_o, & x\geq 0\end{cases}$$

في كلتا الحالتين وهما أن تكون طاقة الجسيم الكلية E أكبر من V_o أو أصغر من V_o حيث V_o هو ارتفاع حاجز الجهد (انظر الشكل 2.III.1). ومنها سنوجد معادلات ا- التيار الساقط ب- التيار المنعكس ت - التيار النافذ ح- معامل الانعكاس د- معامل النفاذية.



شكل 2.III.1 (a) الحالة الأولى $E>V_o$ (b) الحالة الثانية $E<V_o$

الحالة الأولى $E>V_o$

معادلة شرودنجر في المنطقة اليسرى من المستقيم x = 0 تعرف:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_I}{dx^2}=E\psi_I$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_I}{dx^2}=-k^2\psi_I, \quad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \tag{1}$$

والحل العام لها هو:

$$\psi_I(x)=A\underbrace{e^{ikx}}_{\text{Incident wave}}+B\underbrace{e^{-ikx}}_{\text{Reflected wave}} \tag{2}$$

الدالة e^{ikx} هي دالة موجية مستوية تتحرك في الاتجاه الموجب للمحور السيني وتسمى دالة ساقطة (Incident wave)، e^{-ikx} هي دالة موجية مستوية تتحرك في الاتجاه السالب للمحور السيني وتسمى دالة منعكسة (Reflected wave) . A هي سعة الموجة الساقطة و B هي سعة الموجة المنعكسة من حائط الجهد.

معادلة شرودنجر في المنطقة اليمنى من الحائل ($x = 0$) تعرف بالتالي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}+V_o\psi_{II}=E\psi_{II}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}=-\alpha^2\psi_{II}\,,\quad \alpha^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_o) \qquad (3)$$

وحلها العام هو:

$$\psi_{II}(x)=C\,e^{i\alpha x}+D\,e^{-i\alpha x} \qquad (4)$$

$e^{i\alpha x}$ هي دالة موجية مستوية تتحرك في الاتجاه الموجب للمحور السيني وتسمى موجة نافذة (Transmitted wave) وحيث إنه لا يوجد حائط جهد في المنطقة اليمنى لكي ترتد منه الأشعة، فلهذا نضع $D=0$. والآن عند الحد $x=0$ نستطيع أن نطبق الشروط الحدودية للدالة:

$$\because\ \psi_I(x=0)=\psi_{II}(x=0)$$

$$\therefore\quad A+B=C \qquad (5)$$

ولمشتقتها:

$$\because\ \psi'_I(x=0)=\psi'_{II}(x=0)$$

$$\therefore\ ik(A-B)=i\alpha C \qquad (6)$$

حل المعادلتين (5) و(6) يعطي:

$$B=\left(\frac{k-\alpha}{k+\alpha}\right)A\,,\qquad C=\left(\frac{2k}{k+\alpha}\right)A \qquad (7)$$

بالإمكان تعريف:

كثافة التيار الساقط = $\mathrm{v}_1|A|^2=\frac{q}{m}|A|^2$ ،

وكثافة التيار المنعكس = $\mathrm{v}_1|B|^2=\frac{q}{m}|B|^2$ ،

وكثافة التيار النافذ = $\mathrm{v}_2|C|^2=\frac{\alpha}{m}|C|^2$

حيث $\mathrm{v}_i=\hbar k_i/m$. وبالتالي فإن:

معامل الانعكاس (R) =	$\dfrac{\text{كثافة التيار المنعكس}}{\text{كثافة التيار الساقط}}$	$=\left(\dfrac{k-\alpha}{k+\alpha}\right)^2$

معامل النفاذية (T) =	$\dfrac{\text{كثافة التيار النافذ}}{\text{كثافة التيار الساقط}}$	$=\dfrac{4k\alpha}{(k+\alpha)^2}$

1- من العلاقتين السابقتين نجد أن $T+R=1$ وهو قانون حفظ الجسيمات.

2- الفيزياء التقليدية تمنع أي انعكاس عندما $E>V_o$ وهذا غير منطبق في قوانين ميكانيكا الكم وذلك ناتج من الخواص الموجية للجسيمات.