- **اضطراب المرتبة الثانية:**

الهدف هنا الحصول على w_2 وكذلك ψ_2 وذلك من العلاقة الثالثة من العلاقات (6) وهي:

$$\hat{H}_0\psi_2 + \hat{H}'\psi_1 = w_0\psi_2 + w_1\psi_1 + w_2\psi_0$$

كما فعلنا في الإضراب من المرتبة الأولى نكتب الدالة الموجية بشكل سلسلة كالتالي:

$$\psi_2 = \sum_n a_n^2 u_n \qquad (12)$$

نعوض العلاقة (12) في العلاقة السابقة أو العلاقة الثالثة من العلاقات (6) فنجد :

$$\psi_2 = \sum_n a_n^2 u_n \qquad \psi_1 = \sum_n a_n^1 u_n$$

$$\hat{H}_0\psi_2 + \hat{H}'\psi_1 = w_0\psi_2 + w_1\psi_1 + w_2\psi_0$$

$$\hat{H}_0\sum_n a_n^2 u_n + \hat{H}'\sum_n a_n^1 u_n = E_m\sum_n a_n^2 u_n + w_1\sum_n a_n^1 u_n + w_2 u_m$$

$$\sum_n a_n^2 E_n u_n + \hat{H}'\sum_n a_n^1 u_n = \sum_n a_n^2 E_m u_n + w_1\sum_n a_n^1 u_n + w_2 u_m \qquad (13)$$

بضرب العلاقة الأخيرة في (13) بـ u_k^* من الطرفين ومن اليسار ثم تطبيق رموز ديراك نجد:

$$\sum_n a_n^2 E_n u_n + \hat{H}'\sum_n a_n^1 u_n = \sum_n a_n^2 E_m u_n + w_1\sum_n a_n^1 u_n + w_2 u_m$$

$$\left\langle u_k^* \middle\| \sum_n a_n^2 E_n u_n \right\rangle + \left\langle u_k^* \middle\| \sum_n a_n^1 \hat{H}' u_n \right\rangle = \left\langle u_k^* \middle\| \sum_n a_n^2 E_m u_n \right\rangle + \left\langle u_k^* \middle\| w_1 \sum_n a_n^1 u_n \right\rangle + \left\langle u_k^* \middle\| w_2 u_m \right\rangle$$

$$E_k a_k^2 + \sum a_n^1 \hat{H}'_{kn} = a_k^2 E_m + w_1 a_k^1 + w_2 \delta_{mk}$$

$$\text{where} \quad k = m \Rightarrow w_2 = \sum_n a_n^1 \hat{H}'_{mn} - w_1 a_m^1 = \sum_{n \neq m} a_n^1 \hat{H}'_{mn} + a_m^1 \hat{H}'_{mm} - w_1 a_m^1$$

$$\text{when } (n \neq m) \Rightarrow a_n^1 = \frac{H'_{nm}}{E_m - E_n}$$

$$w_1 = H'_{mm} \Rightarrow$$

$$w_2 = \sum_{n \neq m} \frac{H'_{nm}}{E_m - E_n} \hat{H}'_{mn} + a_m^1 \hat{H}'_{mm} - H'_{mm} a_m^1 = \sum_{n \neq m} \frac{|H'_{nm}|^2}{E_m - E_n}$$

$$w_2 = \sum_{n \neq m} \frac{|H'_{nm}|^2}{E_m - E_n} \qquad (14)$$

العلاقة الاخيرة في (14) تعطي حد التصحيح الثاني في مستوي الطاقة المدروس، أما الدالة الموجية فنحصل على المعامل من معالجة العلاقة في السطر الرابع في العلاقة (14) كما يلي :

$$E_k a_k^2 + \sum_n a_n^1 \hat{H}'_{kn} = a_k^2 E_m + w_1 a_k^1 + w_2 \delta_{mk}$$

$$when \quad k \neq m \quad a_m^1 = 0 \Rightarrow$$

$$and\ when\ (k \neq m) \Rightarrow a_k^1 = \frac{H'_{km}}{E_m - E_k}$$

$$w_1 = H'_{mm}$$

$$E_k a_k^2 + \sum_n a_n^1 \hat{H}'_{kn} = a_k^2 E_m + w_1 a_k^1 + w_2 \delta_{mk}$$

$$a_k^2 E_m - E_k a_k^2 = \sum_n a_n^1 \hat{H}'_{kn} - H'_{mm} a_k^1$$

$$a_k^2 (E_m - E_k) = \sum_n a_n^1 \hat{H}'_{kn} - H'_{mm} \frac{H'_{km}}{E_m - E_k}$$

$$when\ n \neq m \Rightarrow a_n^1 = \frac{H'_{nm}}{E_m - E_n} \Rightarrow$$

$$a_k^2 (E_m - E_k) = \sum_{n \neq m} \frac{H'_{nm}}{E_m - E_n} \hat{H}'_{kn} - H'_{mm} \frac{H'_{km}}{E_m - E_k} \Rightarrow$$

$$a^2_{k_{k \neq m}} = \sum_{n \neq m} \frac{H'_{nm}}{(E_m - E_n)(E_m - E_k)} \hat{H}'_{kn} - H'_{mm} \frac{H'_{km}}{(E_m - E_k)(E_m - E_k)}$$

وفي حال m=k نجد المعامل a_m^2 باعتبار أن $a_m^1 = 0$ من خلال معالجة المعادلة الأولى من(15) فنحصل $a^2_{k_{k=}}$ على :

$$a_m^2 = -\frac{1}{2}\sum_n \left|a_n^1\right|^2 = -\frac{1}{2}\sum_{n\neq m}\frac{\left|H'_{mn}\right|}{(E_m - E_n)^2}$$

$when \quad \lambda \to 1$

$$\psi_2 = \sum_n a_n^2 u_n = \sum_{k\neq m}\left[\left(\sum_{n\neq m}\frac{H'_{nm}\hat{H}'_{kn}}{(E_m - E_n)(E_m - E_k)} - \frac{H'_{mm}H'_{km}}{(E_m - E_k)^2}\right)u_k - -\frac{1}{2}\sum_{n\neq m}\frac{\left|H'_{mn}\right|}{(E_m - E_n)^2}u_m\right] \qquad (16)$$

بدمج العلاقات(10) (11)و(14)و(16) نجد نتيجة حلول الاضطراب الأول والثاني وتصبح الأمور اعقد بمعالجة المراتب الأعلى :

$$\psi_2 = \sum_n a_n^2 u_n \qquad \psi_1 = \sum_n a_n^1 u_n$$

$$\psi = \psi_0^n + \lambda^1\psi_1^n + \lambda^2\psi_2^n + ...$$

$when \ \lambda \to 1$

$$\psi = u_m + \sum_{k\neq m}\frac{\hat{H}'_{km}}{(E_m - E_k)}u_k$$

$$+\sum_{k\neq m}\left[\left(\sum_{n\neq m}\frac{H'_{nm}\hat{H}'_{kn}}{(E_m - E_n)(E_m - E_k)} - \frac{H'_{mm}H'_{km}}{(E_m - E_k)^2}\right)u_k - \frac{1}{2}\sum_{n\neq m}\frac{\left|H'_{mn}\right|}{(E_m - E_n)^2}u_m\right]$$

$$w = w_0^n + \lambda^1 w_1^n + \lambda^2 w_2^n + ...$$

$$w = E_m + H'_{mm} + \sum_{n\neq m}\frac{\left|H'_{nm}\right|^2}{E_m - E_n} \qquad (17)$$

لاحظ أن الحد الثالث في العلاقة الأخيرة من (17) يحاول زيادة فاصل الطاقة و هو ما يعبر عنه في الفيزياء (مستويات الطاقة تتنافر فيما بينها).

3. أمثلة ومناقشة:

مثال:

إلكترون في صندوق مكعب طول حرفه a ،سلط عليه مجال كهربائي في الاتجاه السيني والمطلوب :

a) أوجد مقدار التشويش.

b) مقدار التصحيح من المرتبة الأولى للطاقة الأرضية للإلكترون.

c) مقدار التصحيح من الرتبة الأولى للدالة الموجية الأرضية.

علما أن الطاقة والدالة بدون تشويش هما:

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x$$

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

الحل:

طاقة الجهد للإلكترون في مجال كهربائي والطاقة النهائية بعد التشويش تعطى بالعلاقة التالية:

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x$$

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$V = -\int_0^x \vec{F} . d\vec{x} = -\int_0^x -e\vec{E} . d\vec{x} = exE$$

$$\langle H' \rangle = \int \psi_0^* \hat{H}' \psi_0 dx = \int \psi_0^* exE \, \psi_0 dx$$

$$\langle H' \rangle = \int \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x \, (exE) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx$$

$$\langle H' \rangle = \frac{2eE}{a} \int_0^x x \sin^2 \frac{\pi n}{a} x \, dx$$

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2bx}{2} - \frac{\cos 2bx}{2}$$

$$\int_0^a x \sin^2 \frac{\pi n}{a} x \, dx = \frac{a^2}{4}$$

$$\langle H' \rangle = \frac{2eE}{a} \frac{a^2}{4} = \frac{eaE}{2}$$

$$w = w_0 + w_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 + \frac{eaE}{2}$$

أما الدالة الموجية فتعالج كما يلي:

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}x$$

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

$$\psi = \psi_0^n + \lambda^1\psi_1^n$$

$$\psi = u_m + \sum_{k\neq m}\frac{\hat{H}'_{km}}{(E_m - E_k)}u_k$$

$$\psi_1 = \sum_{k\neq m}\frac{\hat{H}'_{km}}{(E_m - E_k)}u_k = \sum_{k\neq m}\frac{\langle u_k|\hat{H}'|u_m\rangle}{(E_m - E_k)}u_k$$

$$when \quad m = 1, k = 2,3,4,...$$

$$\langle u_2|\hat{H}'|u_1\rangle = \frac{2eE}{a}\int_0^a x\,\sin\frac{2\pi x}{a}.\sin\frac{\pi x}{a}\,dx = \frac{2eE}{a}\left(-0.8\frac{a^2}{\pi^2}\right)$$

$$\psi_1 = \frac{\frac{2eE}{a}\left(-0.8\frac{a^2}{\pi^2}\right)}{\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}u_2 = 0.48eEa\left(\frac{ma^2}{\hbar^2}\right)u_2$$

$$\psi_1 = 0.48eEa\left(\frac{ma^2}{\hbar^2}\right)u_2$$

$$\psi = u_1 + \left(\frac{0.48eEma^3}{\hbar^2}\right)u_2 + ...$$

$$\psi = u_1 + a_2u_2 + ...$$

(امثلة في الكتاب على نظرية الاضطراب مطلوبه)