السرعة والتعجيل في الاحداثيات القطبية:

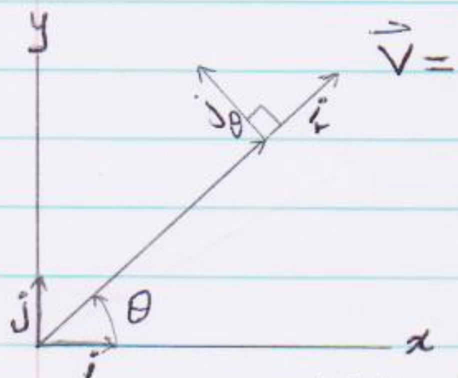
تستخدم الاحداثيات القطبية $\vec{r}$ و θ لتمثيل موضع جسم يتحرك في مستوٍ. يمكن كتابة موقع الجسم في الاحداثيات القطبية حاصل ضرب المسافة القطبية r في وحدة المتجه القطبية i_r

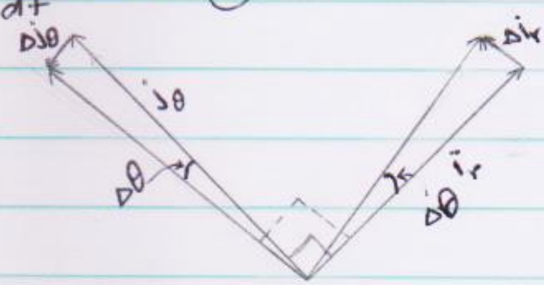
$$\vec{r} = r\, i_r \qquad (1)$$

عندما يتحرك الجسم يتغير كل من r و i_r لان كليهما دوال للزمن. متجه السرعة هو تفاضل متجه الموقع

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} i_r + r\frac{di_r}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\, i_r + r\frac{di_r}{dt} \qquad (2)$$





الشكل اعلاه يوضح الوحدات المتجه للاحداثيات القطبية المستوية

لحساب المشتقة $\frac{di_r}{dt}$ نفرض أنه عندما يتغير مقدار المتجه $\vec{r}$ بمقدار $\Delta\theta$ كما موضح في الشكل اعلاه، فالتغير المقابل له في الوحدة المتجه القطبية Δi_r ومقداره $|\Delta i_r|$ تقريباً يساوي $\Delta\theta$ واتجاه Δi_r عمودي على i_r فنستخدم وحدة متجه اخرى j_θ اتجاهها عمودي على i_r

$$\Delta i_r \simeq j_\theta\, \Delta\theta$$

بالقسمة على Δt واخذ limt نحصل على

$$\therefore \frac{di_r}{dt} = j_\theta \frac{d\theta}{dt} = j_\theta\, \dot{\theta} \qquad (3)$$

* بنفس الطريقة يمكن ان نثبت التغير في وحدة المتجه j_θ يساوي تقريباً

$$\Delta j_\theta \simeq -i_r \,\Delta\theta$$

الاشارة السالبة تعني تغير اتجاه Δj_θ بعكس اتجاه i_r

$$\frac{dj_\theta}{dt} = -i_r \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{——} (*)$$

بتعويض معادلة (3) في معادلة نحصل على

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\, i_r + r\dot{\theta}\, j_\theta} \qquad \text{——} (4)$$

$\dot{r}$ يمثل مقدار المركبة القطبية لمتجه السرعة
$r\dot{\theta}$ يمثل مقدار المركبة المستعرضة

لحساب متجه التعجيل في الاحداثيات القطبية نأخذ مشتقة السرعة القطبية بالنسبة للزمن، اي ان

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\, i_r + r\dot{\theta}\, j_\theta\right)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\, i_r + \dot{r}\frac{di_r}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\dot{\theta}\, j_\theta\right)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\, i_r + \dot{r}\frac{di_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\, j_\theta + r\dot{\theta}\frac{dj_\theta}{dt} \qquad \text{——} (5)$$

بتعويض المعادلة (3) و (*) في معادلة (5) نحصل على

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, i_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\, j_\theta} \qquad \text{——} (6)$$

معادلة (6) تمثل متجه التعجيل بدلالة الاحداثيات القطبية المستوية

المركبة القطبية لمتجه التعجيل هي

$$\vec{a}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

المركبة المستعرضة لمتجه التعجيل هي

$$\vec{a}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

مثال / ص ٤٧

يتحرك جسم على مسار حلزوني يكون موقعه في الإحداثيات القطبية هو $\theta = ct$ و $r = bt^2$ حيث ان b و c ثوابت جد السرعة والتعجيل كدالة للزمن.

Solution/

$$\vec{V} = \dot{r}i_r + r\dot{\theta}j_\theta$$

$$r = bt^2$$

$$\frac{dr}{dt} = 2bt = \dot{r}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 2b = \ddot{r}$$

$$\theta = ct$$

$$\frac{d\theta}{dt} = c = \dot{\theta}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 = \ddot{\theta}$$

$$\vec{V} = (2bt)i_r + (bt^2c)j_\theta$$

$$= (2bt)i_r + (bct^2)j_\theta$$

مقدار السرعة $|\vec{V}| = \left((2bt)^2 + (bct^2)^2\right)^{1/2}$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)i_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})j_\theta$$

$$\vec{a} = (2b - bc^2t^2)i_r + (4bct + bt^2(0))j_\theta$$

$$\vec{a} = b(2 - c^2t^2)i_r + 4bctj_\theta$$

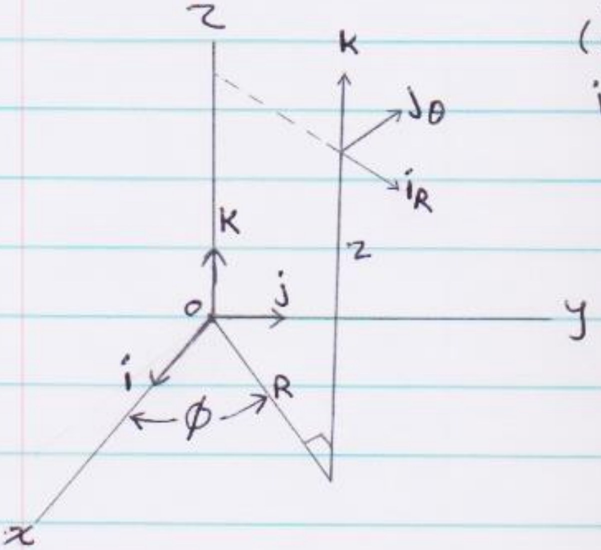
مقدار التعجيل $|\vec{a}| = \left[(b(2-c^2t^2))^2 + (4bct)^2\right]^{1/2}$

السرعة والتعجيل في الإحداثيات الاسطوانية:-

يمكن تحديد موقع الجسم بدلالة الإحداثيات الاسطوانية
R , φ , z ، فيكتب متجه الموقع على النحو التالي

$$\vec{r} = R\, i_r + zK \quad \text{——} \ (1)$$

i_r وحدة المتجه القطبية في المستوي xy .
K وحدة المتجه باتجاه المحور z
يلزمنا وحدة متجه ثالثة (j_ϕ)
بحيث تكون المتجهات الثلاثة i_R , j_ϕ , K



لإيجاد متجهي السرعة والتعجيل يجب تفاضل الوحدات المتجهة بنفس الطريقة المستخدمة في الإحداثيات القطبية نجد ان

الوحدات المتجه للاحداثيات الاسطوانية

$$\frac{dj_\phi}{dt} = -i_R\,\dot{\phi}$$

$$\frac{di_R}{dt} = j_\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{dK}{dt} = 0$$

وحدة المتجه K لا يتغير اتجاهها فمشتقتها بالنسبة للزمن تساوي الصفر.

فإن متجه السرعة عبارة

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\, i_r + zK\right)$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{R}\, i_r + R\dot{\phi}\, j_\phi + \dot{z}K} \quad \text{——} \ (2)$$

لإيجاد متجه التعجيل نشتق متجه السرعة بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\, i_R + R\dot{\phi}\, j_\phi + \dot{Z} K)$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\, i_R + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\, j_\phi + \ddot{Z} K} \quad \text{—— (3)}$$

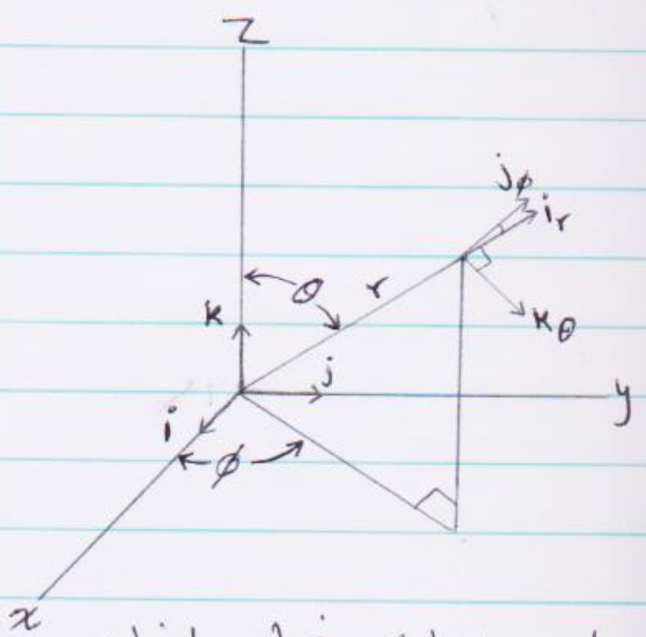
السرعة والتعجيل في الإحداثيات الكروية :-

يمكن تحديد موقع الجسم في الإحداثيات الكروية r, ϕ, θ بكتابة متجه الموقع كحاصل ضرب المسافة القطبية r ووحدة المتجه القطبي .

$$\vec{r} = r\, i_r \quad \text{—— (1)}$$

اتجاه وحدة المتجه i_r يعين بالزاويتين ϕ و θ كما هو مبين في الشكل المجاور .

ندخل وحدتين متجهتين أخريين j_ϕ و K_θ لتصبح المتجهات الثلاثة i_r ، j_ϕ ، K_θ



الوحدة المتجه في الإحداثيات الكروية

متجه السرعة هو مشتقة متجه الموقع بالنسبة للزمن

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r i_r) = \dot{r} i_r + r \frac{d i_r}{dt} \quad \text{—} (2)$$

ان مشتقات وحدات الموقع الثلاثة هي

$$\left.\begin{aligned} \frac{d i_r}{dt} &= \dot{\phi} j_\phi \sin\theta + \dot{\theta} k_\theta \\ \frac{d j_\phi}{dt} &= -\dot{\phi} i_r \sin\theta - \dot{\phi} k_\theta \cos\theta \\ \frac{d k_\theta}{dt} &= -\dot{\theta} i_r + \dot{\phi} j_\phi \cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{—} (3)$$

نعوض معادلة (3) في (2) نحصل على متجه السرعة

$$\boxed{\vec{V} = i_r \dot{r} + j_\phi r \dot{\phi} \sin\theta + k_\theta r \dot{\theta}} \quad \text{—} (4)$$

لايجاد متجه التعجيل نشتق متجه السرعة بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(i_r \dot{r} + j_\phi r \dot{\phi} \sin\theta + k_\theta r \dot{\theta}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} = &\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right) i_r \\ &+ \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right) j_\phi \\ &+ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta\right) k_\theta \end{aligned}} \quad \text{—} (5)$$