س1/ إذا علمت أن المتجه متغير مع الزمن $\vec{A} = i\alpha t + j\beta t^2 + k\gamma t^3$

حيث أن α, β, γ قيم ثابتة. جد المشتقة الأولى والثانية للمتجه!

<u>Solutions</u>

$$\vec{A} = i\alpha t + j\beta t^2 + k\gamma t^3$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(i\alpha t) + \frac{d}{dt}(j\beta t^2) + \frac{d}{dt}(k\gamma t^3)$$

$$= i\alpha + 2j\beta t + 3k\gamma t^2$$

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \quad \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(i\alpha) + \frac{d}{dt}(2j\beta t) + \frac{d}{dt}(3k\gamma t^2)$$

$$= i(0) + 2j\beta + 6k\gamma t$$

$$= 2j\beta + 6k\gamma t$$

س ٢-٤٠ / ص٥٢ / يتغير تعجيل جسيم مع الزمن وفقاً للمعادلة التالية

$$\vec{a} = iAt + jBt^2 + KCt^3$$

إذا كانت السرعة $\vec{V}_0$ والموضع $\vec{r}_0$ في الزمن $t=0$. جد متجه الموضع كدالة للزمن ؟

<u>solutions</u> / $\vec{a} = iAt + jBt^2 + KCt^3$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\, dt$$

$$\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\, dt = \int_0^t (iAt + jBt^2 + KCt^3)\, dt$$

$$\vec{v} = \int_0^t (iAt)\, dt + \int_0^t (jBt^2)\, dt + \int_0^t (KCt^3)\, dt$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2} iAt^2 \Big|_0^t + \frac{1}{3} jBt^3 \Big|_0^t + \frac{1}{4} KCt^4 \Big|_0^t$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2} iAt^2 + \frac{1}{3} jBt^3 + \frac{1}{4} KCt^4$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\, dt = \int_0^t \left(\frac{1}{2} iAt^2 + \frac{1}{3} jBt^3 + \frac{1}{4} KCt^4\right) dt$$

$$\vec{r} = \int_0^t \left(\frac{1}{2} iAt^2\right) dt + \int_0^t \left(\frac{1}{3} jBt^3\right) dt + \int_0^t \left(\frac{1}{4} KCt^4\right) dt$$

$$\vec{r} = \frac{1}{6} iAt^3 \Big|_0^t + \frac{1}{12} jBt^4 \Big|_0^t + \frac{1}{20} KCt^5 \Big|_0^t$$

$$\vec{r} = \frac{1}{6} iAt^3 + \frac{1}{12} jBt^4 + \frac{1}{20} KCt^5$$

طريقة اخرى

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow d^2\vec{r} = \vec{a}\, dt^2$$

$$\vec{r} = \int_0^t\int_0^t \vec{a}\, dt^2$$

$$\vec{r} = \frac{1}{6} iAt^3 + \frac{1}{12} jBt^4 + \frac{1}{20} KCt^5$$ ⇐ واجب

س٢-٩/ص٥٤/ أ/ إذا علمت ان الاحداثيات القطبية لجسم هي $r = be^{kt} \; ; \; \theta = \omega t$

جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال الزمن. كذلك جد الانطلاق ومقدار التعجيل في الزمن $t=0$.

Solutions

$$r = be^{kt} \qquad \theta = \omega t$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = bk e^{kt} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} = bk^2 e^{kt} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0$$

لايجاد متجه السرعة في الاحداثيات القطبية من العلاقة التالية

$$\vec{v} = \dot{r}\, i_r + r\dot{\theta}\, j_\theta$$
$$\vec{v} = i_r bk e^{kt} + b\omega e^{kt} j_\theta$$

لايجاد قيمة السرعة (الانطلاق)

$$|\vec{v}| = [b^2 k^2 e^{2kt} + b^2 \omega^2 e^{2kt}]^{1/2}$$
$$|\vec{v}| = be^{kt}[k^2 + \omega^2]^{1/2}$$

عندt=0 فإن السرعة (الانطلاق) يساوي

$$|\vec{v}| = b[k^2 + \omega^2]^{1/2}$$

لإيجاد متجه التعجيل في الاحداثيات القطبية من العلاقة التالية

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) i_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) j_\theta$$
$$\vec{a} = (bk^2 e^{kt} - b\omega^2 e^{kt}) i_r + (0 + 2bk\omega e^{kt}) j_\theta$$

$$\vec{a} = be^{kt}(k^2 - \omega^2) i_r + 2bk\omega e^{kt} j_\theta$$

لايجاد قيمة التعجيل

$$|\vec{a}| = \left[b^2 e^{2kt} (k^2 - w^2)^2 + 4 b^2 k^2 w^2 e^{2kt} \right]^{1/2}$$

$$|\vec{a}| = b e^{kt} \left[k^4 - 2k^2 w^2 + w^4 + 4k^2 w^2 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{a}| = b e^{kt} \left[k^4 + 2k^2 w^2 + w^4 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{a}| = b e^{kt} \left[(k^2 + w^2)^{\cancel{2}} \right]^{1/\cancel{2}}$$

$$|\vec{a}| = b e^{kt} (k^2 + w^2)$$

عند $t=0$ فإن مقدار التعجيل يساوي

$$|\vec{a}| = b(k^2 + w^2)$$

ـ لايجاد الزاوية المحصورة بين متجهي السرعة والتعجيل من العلاقة

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = |\vec{v}||\vec{a}| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}||\vec{a}|}$$

$$\cos\theta = \frac{[bke^{kt} i_r + bwe^{kt} j_\theta] \cdot [be^{kt}(k^2 - w^2) i_r + 2bkwe^{kt} j_\theta]}{be^{kt}[k^2 + w^2]^{1/2} \cdot be^{kt}(k^2 + w^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{\cancel{b^2 e^{2kt}} [k(k^2 - w^2) + 2k w^2]}{\cancel{b^2 e^{2kt}} [k^2 + w^2]^{1/2} (k^2 + w^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{k^3 - kw^2 + 2kw^2}{[k^2 + w^2]^{1/2} (k^2 + w^2)} = \frac{k^3 + kw^2}{[k^2 + w^2]^{1/2} (k^2 + w^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{k \cancel{(k^2 + w^2)}}{[k^2 + w^2]^{1/2} \cancel{(k^2 + w^2)}} = \frac{k}{[k^2 + w^2]^{1/2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{k}{[k^2 + w^2]^{1/2}}$$

واجب ن/ إذا علمت ان الاحداثيات القطبية لجسم هي

$$r = A \cos \omega t$$
$$\theta = c\,\omega t$$

جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن ثم جد الانطلاق ومقدار التعجيل في الزمن $t=0$ والزاوية المحصورة بين متجهي السرعة والتعجيل .