University of Anbar جامعة الانبار

اسم الكلية : كلية العلوم

اسم المحاضر: د. خالد روكان فليح الزوبعي

المرحلة: المرحلة الاولى رياضيات

اسم المادة انكليزي: General Physics

اسم المادة عربي: فيزياء عامة

عنوان المحاضرة انكليزي: Vectors

عنوان المحاضرة العربي: المتجهات

المصدر

Physics for scientists and engineer
by
Serway

khalidrokan478@gmail.com

الفصل الثاني

المتجهاتVectors

1 - 2 الكميات القياسية والكميات المتجهة Scalars and vectors

الكميات الفيزيائية نوعان:

أ- الكميات القياسية: هي كميات فيزيائية غير متجهة يتم تعيينها تماما إذا عرف مقدارها فقط

ومن أمثلة الكميات القياسية: الكتلة، الزمن، الطول، درجة الحرارة والطاقة

ب- الكميات المتجهة: هي كميات فيزيائية متجهة يتم تعيينها تماما بمعرفة مقدارها واتجاهها.

يمكن تمييز الكمية المتجهة عن الكمية القياسية وذلك بكتابة المتجه بخط عريض **A** كما هو مستخدم في الكتب أو بوضع إشارة سهم أعلى الرمز A كما هو الحال في الكتابة اليدوية A . أما الكمية القياسية أو ما يعرف بقيمة المتجه A مثلا فيعبر عنه بالرمز |A|. ومن الأمثلة على الكميات المتجهة الإزاحة والسرعة والعجلة والقوة وكمية الحركة. وتستخدم عادة الطرق الهندسية في تمثيل الكمية المتجهة حيث يمثل المتجه بيانية بسهم يتناسب طوله طرديا مع مقدار المتجه شكل (1-2) سهم يمثل المتجه

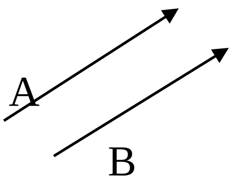
شكل (1-2).

خواص المتجهات:

• تساوي المتجهات: إن المتجهين B، A متساويان إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه (ونفس الوحدة إن وجدت) ،

أي أن B =A

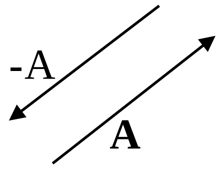
إذا كان مقدار A يساوي مقدار B وكان السهم الممثل للمتجه A يوازي السهم الممثل للمتجه B



شكل (2-3)تساوى المتجهات

سالب المتجه:

إذا أعطينا المتجه **A** فإن A- هو متجه مساو له في المقدار ويعاكسه في الاتجاه شكل (3-2)



شكل (3-2) سالب المتجه

khalidrokan478@gmail.com

. جمع المتجهات:

عند جمع المتجهات يجب أن تكون هذه المتجهات من نفس النوع فلا يمكن مثلا أن نجمع متجه قوة إلى متجه سرعة لاختلافهما في الأبعاد. وذلك ينطبق أيضا عند جمع الكميات القياسية.

إيجاد محصلة مجموعة من المتجهات:

1- إذا كانت جميعها تعمل على خط واحد فإنها تجمع جبرية بإشاراتها وذلك بعد اختيار اتجاها معينا يكون موجبة.

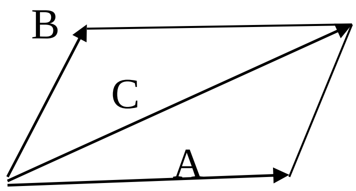
وإذا تساوى مقدار متجهين وتضادا اتجاها كان محصلتهما تساوي صفر.

2- إذا لم يكن خط تأثير المتجهات واحدا فإننا نوجد محصلتها بإحدى طريقتين:

أ. طريقة متوازي الأضلاع:

حاصل جمع المتجهين A و B هو متجه C، ويسمى عادة بالمحصلة (Resultant). ولإجراء عملية الجمع نقوم برسم أحد المتجهين أولا وليكن A بمقياس رسم مناسب ، ثم من بداية المتجه A نرسم المتجه B بنفس مقياس الرسم ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع فتكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجاوران هما المتجهان A وB.

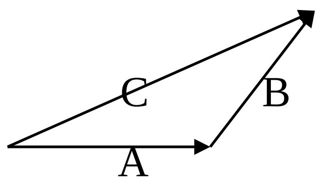
كما هو موضح في الشكل



(4-2) محصلة متجهين

ب- طريقة المثلث:

لإجراء عملية الجمع بطريقة المثلث نقوم برسم أحد المتجهين أولا وليكن A بمقياس رسم مناسب، ثم من رأس المتجه A ننقل المتجه B فتكون المحصلة C هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه و وينتهي عند رأس المتجه B كما في الشكل (2-5).



شكل (2-5) محصلة متجهين

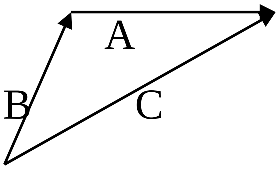
A + B بطريقة المثلث

ويمكن التعبير رياضية عن عملية الجمع في كلتي الطريقتين بالمعادلة (2-1).

$$C = A + B \qquad (2\text{-}1)$$

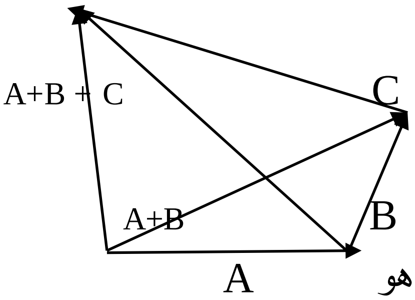
لنفرض أننا بدأنا عملية الجمع بأخذ المتجه B أولا ثم جمعنا

إليه المتجه A أي قمنا بعملية الجمع A + B يتضح من الشكل (2-6) أننا نحصل على نفس المتجه C وبذلك نستطيع أن نكتب :



شكل (2-6) محصلة متجهين

$$A + B = B + A \qquad (2\text{-}2)$$



بطريقة المثلث

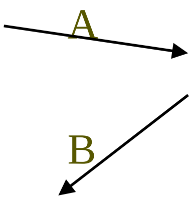
وتسمي هذه النتيجة بقانون التبادل للجمع .
ويمكن تطبيق طريقة المثلث لجمع اكثر من متجهين, فمثلا المتجهات الثلاث Aو B و C يمكن جمعها كما هو مبين في الشكل (2-7). ويمكن التعبير عن هذه النتيجة رياضية بالمعادلة

شكل (2-7) محصلة ثلاث متجهات بطريقة المثلث

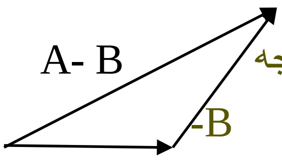
$$(A+B) + C = A +(B + C)$$

وتسمى هذه المعادلة بقانون الترافق للجمع.

. طرح المتجهات:



إن عملية طرح المتجهات شبيهة بعملية جمع المتجهات، فمثلا A - B هو متجه جديد C ولتحديد المتجه C نقوم برسم المتجه A أولا ومن رأس هذا المتجه نرسم سهمة موازية ومعاكسة في الاتجاه للمتجه B.
إن هذا السهم يمثل المتجه -B ، وبذلك تكون المحصلة C هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه A وينتهي عند رأس المتجه -B شكل (9-2). تمثل هذه العملية رياضية بالمعادلة (5-2). شكل (2-9) طرح المتجهات



$$C = A - B \qquad (2\text{-}4)$$

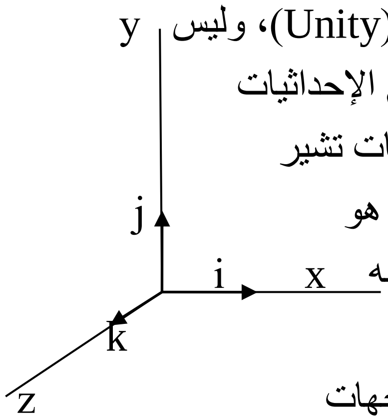
. ضرب المتجهات بكمية قياسية:

يمكن ضرب المتجه بكمية قياسية فمثلا 2A تعني متجه جديد مقداره 2A واتجاهه هو نفس اتجاه A. وبصورة عامة فإن ضرب المتجه A بالكمية القياسية ، يعطي المتجه cA و اتجاهه هو نفس اتجاه A إذا كانت الكمية القياسية c موجبة. وعكس اتجاه A إذا كانت الكمية القياسية c سالبة

من الأمثلة الفيزيائية على ضرب المتجه بكمية قياسية الزخم الخطي (كمية التحرك الخطية) P وهو حاصل ضرب الكتلة m في متجه السرعة v ويعطي بالعلاقة (2-5)

$$P = mv \qquad (2\text{-}5)$$

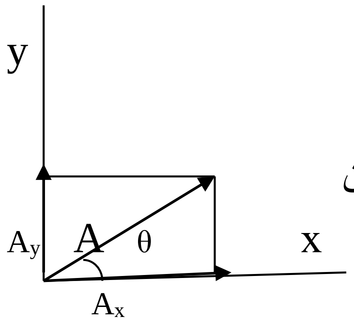
2 - 2 متجهات الوحدة Unit vectors



متجه الوحدة هو متجه له اتجاه معين وقيمته هي الوحدة (Unity)، وليس له وحدة قياس أو بعد يوجد ثلاث متجهات وحدة في نظام الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) هي k ,i, j حيث أن هذه المتجهات تشير إلى الاتجاه الموجب للمحاور x ,y, z على الترتيب كما هو موضح في الشكل (2-10) ، فمثلا إذا كان المتجه A يتجه باتجاه x الموجب وقيمته A و B يتجه باتجاه y الموجب وقيمته B و C باتجاه z الموجب وقيمته C فإن هذا المتجهات تكتب على الترتيب بالصورة الاتجاهية التالية :

$$A = Ai, \quad B = Bj, \quad C = Ck$$

ملاحظة : وجود الإشارة السالبة أمام أي متجه وحدة يدل الاتجاه المعاكس فمثلا i- تشير إلى الاتجاه السالب لمحور x. متجهات الوحدة i و j و k تتجه في الاتجاه الموجب للمحاور الثلاثة على الترتيب



2 - 3 تحليل المتجهات Analysis of vectors

يمكن تحليل أي متجه A واقع في المستوى xy إلى متجهين متعامدين ، الأول موازي لمحور x (Ax) والآخر موازي لمحور y (A_y) وتكون محصلتهما هي نفس المتجه A:

شكل (2-11) تحليل المتجه A إلى مركبتين متعامدتين

$$A = A_x i + A_y j \qquad (2\text{-}7)$$

فإذا كان المتجه A يصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب للمحور x كماهو بالشكل (2-11) وأسقطنا من رأس المتجه A عمودين على المحورين x و y فإن الكميتين A_x و A_y هما مركبتا المتجه A ومن الشكل نجد أن :

$$Ax = A\cos\theta, \qquad Ay = A\sin\theta \qquad (2\text{-}8)$$

khalidrokan478@gmail.com

• إن المركبتين *Ax* و ,Ay أرقام يمكن أن تكون موجبه أو سالبه (أو صفر) و تسمى عملية إيجادهما بتحليل المتجه إلى مركباته. • إن المركبتين ,Ax و Ay تشكلان ضلعين من مثلث قائم الزاوية بينما يشكل A وتر هذا المثلث و بتطبيق

نظرية فيثاغورث نجد أن قيمة المتجه A تعطي كما في المعادلة (2-9) :

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \qquad (2\text{-}9)$$

$$\tan\theta = A_y / A_x \qquad (2\text{-}10)$$

وعند حلها لإيجاد قيمة θ فإنا نكتب

$$\theta = \tan^{-1} (A_y / A_x)$$

وتعتبر θ المسئولة عن تحديد إشارات المركبات ,Ax

و Ay لأن الزاوية θ تحدد الربع الذي يقع فيه المتجه A. الشكل (2-12) يلخص إشارات المركبات في كل ربع.

مثال (2-1) احسب المركبتين السينية والصادية للمتجهات التالية: أ- متجه A قيمته 6 وحدات ويصنع زاوية مقدارها 240° مع الاتجاه الموجب لمحورx

الحل:

$$Ax = A \cos 240 = 6^* (-1/2) = -3$$

$$Ay = A \sin 240 = 6^*(-0.86) = -5.2$$

حل آخر:

$$Ax = -A \cos 60 = -6 \times (1/2) = -3$$

$$Ay = -A \sin (60) = -6^*0.86 = -5.2$$

ب- متجه B قيمته 5 وحدات و يصنع زاوية مقدارها 110^0 مع الاتجاه الموجب لمحور x

الحل:

$$Bx = B \cos 110 = - 1.7$$

$$By = B \sin 110 = 4.7$$

khalidrokan478@gmail.com

محصلة المتجهات Resultant of vectors

تستخدم طريقة تحليل المتجهات لإيجاد محصلة مجموعة منها فإذا فرضنا مثلا ثلاثة متجهات A و B و C في مستوى واحد و تصنع الزوايا $_3\theta$ ، $_2\theta$ ، $_1\theta$ مع الاتجاه السيني على الترتيب فإن مركبات هذه المتجهات في الاتجاه السيني هي:

$$Ax = A\ cos_1\theta$$

,

$$Bx = B\ cos_2\theta\ ,$$

$$Cx = C\ cos_3\theta$$

وتكون محصله هذه المركبات في الاتجاه السيني هي:

$$Rx = Ax + Bx + Cx = A\ cos_1\theta\ \ + B\ cos_2\theta + C\ cos\ _3\theta$$

بالمثل بالنسبة للمركبات العمودية في الاتجاه الصادي تكون محصلتها

$$Ry = Ay + By + Cy = A\ sin_1\theta,\ +B\ sin_2\theta\ \ + C\ sin_3\theta$$

قيمة محصلة مجموعة المتجهات تكون هي نفسها محصله المركبات السينية و الصادية و تعطي بالمعادلة

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \quad (2\text{-}12)$$

ويمكن إيجاد اتجاه المحصلة أي الزاوية و التي تصنعها مع المحور السيني من المعادلة

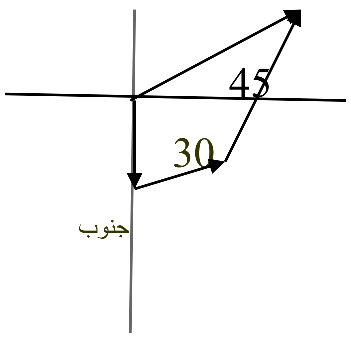
$$\theta = \tan^{-1} (R_y / R_x) \qquad (2\text{-}13)$$

ويمكن كتابة محصلة مجموعة من المتجهات بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$$\mathbf{R=A+B+C=(A_x+B_x+C_x)i+(A_y+B_y+C_y)j+(A_z+B_z+C_z)k} \qquad (2\text{-}14)$$

مثال

يخرج سائح من مدينة هيت فيقطع مسافة 10 km باتجاه الجنوب ، ثم يسير مسافة 15 km باتجاه يصنع 30% شمال شرق ثم يقطع مسافة 02km باتجاه الشمال الشرقي. ما هو موضع السائح بالنسبة لمدينة هيت ؟



الحل:

إن المسافات التي يقطعها السائح هي متجهات إزاحة لكل منها مقدار و اتجاه، فالمسألة هي جمع متجهات.

khalidrokan478@gmail.com

الرسم يوضح الحالات المتعاقبة لسير السائح و يوضح موقعه الحالي من مدينة صنعاء والتي تمثل نقطة الأصل،

على تحليل الإزاحات الثلاثة في الاتجاهين ولإيجاد قيمة واتجاه المحصلة (الموضع بالنسبة لمدينة غزة) نعمل السيني والصادي ثم نحسب المحصلة مقدارا واتجاها.

$R_x = 0 + 15 \cos 30 + 20 \cos 45 = 15 * 0.866 + 20 * 0.707$

$= 27.13 \ Km$

$R_y = -10 + 15 \sin 30 + 20 \sin 45 = -10 + 15 * 0.5 + 20 * 0.707$

$= 11.64 \ Km$

$R^2 = R_x^2 + R_y^2 = ((27.13)^2)^{1/2} + ((11.64)^2)^{1/2}$

$R = (736 + 135.5)^{1/2} = 29.5 Km$

$\theta = \tan^{-1} (R_y / R_x)$

$\theta = \tan^{-1} (11.64 / 27.13)$

$\theta = 23.2^0$

ملاحظة/ يمكن كتابة المحصلة بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$R = R_x i + R_y j = 27.13 i + 11.64j$

مثال (2-2)

Two vectors are given by A = 3i-2j and B = -i - 43 . Calculate (a) A+B, (b) A-B , (c). |A + B|, (d) |A - B|, and (e) the direction of A+B and |Ā– B|.

الحل

(a) A + B = (3i - 2j) + (-i - 4j) = 2i - 6j

(b) A-B = (3i - 2j) - (-i - 4j) = 4i + 2j

(c) $|A + B| = [2^2 + (-6)^2]^{1/2} = 6.32$

(d) $|A - B| = [4^2 + 2^2]^{1/2} = 4.47$

(e) For A + B , $\theta = \tan^{-1}(-6/2) = -71.60 = 288^0$

For $|\bar{A} - B|$, $\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.6^0$

Product of vectors ضرب المتجهات

يوجد نوعين من الضرب للمتجهات النوع الأول يسمى الضرب القياسي لأن حاصل ضرب متجهين يعطي كمية قياسية مثل حاصل ضرب متجه القوة في متجهة الإزاحة يكون الناتج الشغل وهو كمية قياسية،

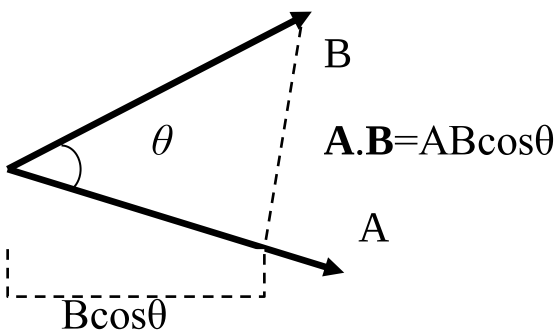
والنوع الثاني هوالضرب الاتجاهي وذلك لان حاصل ضرب متجهين ينتج عنه متجه ثالث يكون اتجاهه عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين الآخرين مثل متجه سرعة جسم مشحون في متجه المجال المغناطيسي ينتج عنه متجه قوة مغناطيسية

الضرب القياسي

The scalar product

يعرف الضرب القياسي scalar product بالضرب النقطي dot product وتكون نتيجة الضرب القياسي لمتجهين كمية قياسية. ويعرف الضرب القياسي لمتجهين بحاصل ضرب مقدار المتجه الأول في مقدار المتجه الثاني في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما.

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = |A|B| \cos\theta$



يمكن إيجاد قيمة الضرب القياسي لمتجهين باستخدام مركبات كل متجه كما يلي:

$i.i=j.j=k.k=1$, $i.j = i.k= j.k =0$

$\mathbf{A}.\mathbf{B}= (A_x\, i+ A_y j+ A_z k) . (B_x\, i+ B_y\, j+ B_z k)$

$\boldsymbol{A.B} = (A_x i.B_x i + A_x i.B_y j + A_x i.B_z k + A_y j.B_x i + A_y j B_y j + A_y j.B_z k$

$+ A_z k.B_x i + A_z k.B_y j + A_y k.B_z k)$

Therefore

.: $\mathbf{A.B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

The angle between the two vectors is

$\cos\theta = \mathbf{A.B}/|A||B| = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)/|A||B|$

قواعد الضرب العددي في القائمة التالية

$$(1)\quad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$(2)\quad \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$(3)\quad m(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (m\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(m\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})\,m$$

مثال

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y})\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y})$$
$$= A_x\hat{x}\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y}) + A_y\hat{y}\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y})$$
$$= A_xB_x + A_yB_y$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$$

مثال. ضع في اعتبارك متجهين $\vec{A} = 2\hat{x} + 2\hat{y}$ ، و $\vec{B} = 6\hat{x} - 3\hat{y}$. الآن ما هي الزاوية بين هذين المتجهين؟

من تعريف المنتجات العددية لدينا

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$
$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 2x6 - 3x2 = 6$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2.83$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 6.71$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{6}{2.83 \times 6.71} = 0.316$$

$$\therefore \theta = 71^{o}\, 36'$$

khalidrokan478@gmail.com