University of Anbar جامعة الانبار

اسم الكلية : كلية العلوم

اسم المحاضر: د. خالد روكان فليح الزوبعي

المرحلة: المرحلة الاولى رياضيات

اسم المادة انكليزي: General Physics

اسم المادة عربي: فيزياء عامة

عنوان المحاضرة انكليزي: problems- Vectors

عنوان المحاضرة العربي: المتجهات ـ مسائل

المصدر

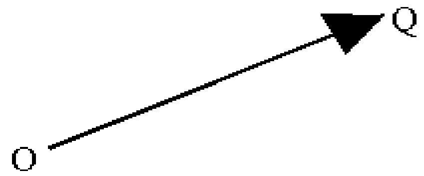
Physics for scientists and engineer
by

khalidrokan478@gmail.com

الضرب الاتجاهي *cross product*

الكميات التي تتصرف مثل الإزاحة تسمى "متجهات rotceV". على سبيل المثال ، الإزاحة (x) ، السرعة (v) ، التسارع (a) ، القوة (F) ، العزم (M) ، الوزن (G) ... إلخ. (rotceV تعني "ناقل" في اللاتينية. مصطلح "ناقل" في علم الأحياء يعني حشرة أو حيوانًا أو عاملًا يحمل سببًا للمرض من كائن حي إلى آخر)

بيانيا ، يتم تمثيل المتجه بسهم يحدد الاتجاه. يحدد طول السهم مقدار المتجه. يظهر هذا في الشكل 1. إذا أشرنا إلى أحد طرفي السهم بواسطة الأصل O ورأس السهم بواسطة Q. ثم يمكن تمثيل المتجه جبريًا بواسطة



المتجهات لها كل من المقدار والاتجاه ، وتتبع قواعد معينة للجمع.

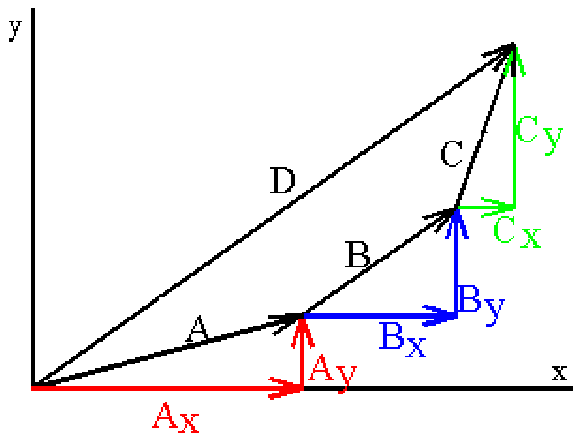
يمكن استخدام تحليل المتجه في مكوناته في جمع وطرح المتجهات. لتوضيح هذا ، دعونا ننظر في مثال ، ما هو مجموع

$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$$

$$\mathbf{C} = C_x\hat{x} + C_y\hat{y}$$

المتجهات الثلاثة التالية؟



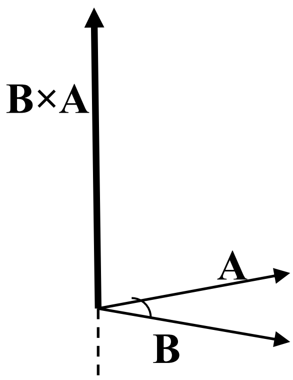
من خلال حل كل من هذه المتجهات الثلاثة في مكوناتها ، نرى أن النتيجة هي الشكل المجاور.

$D_x = A_x + B_x + C_x$

$D_y = A_y + B_y + C_y$

khalidrokan478@gmail.com

يعرف الضرب الاتجاهي *cross product* بي*vector product* ويكون نتيجة الضرب الاتجاهي لمتجهين كمية متجهه.



و قيمة هذا المتجه **B×A=C**

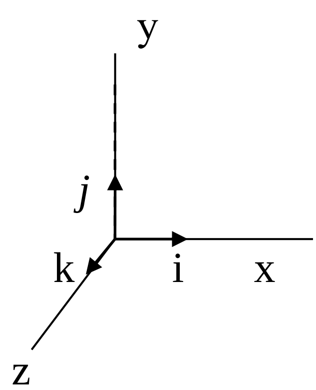
واتجاهه عمودي على كلا المتجهيين ,

θsinBA =**B×A**

θsinBA =**B×A**

B×A= $(A_x\, i + A_y j + A_z k) \times (B_x\, i + B_y\, j + B_z k)$

لحساب هذا الناتج ، نستخدم حقيقة أن الزاوية بين متجهات الوحدة i، j، k تساوي 90 درجة.



$i\times i=0,$ $k\times k=0,$ $j\times j=0$,

$i\times j=k,$ $j\times k=i$ $k\times i=j$

$i\times k=-j$, $j\times i=-k$ $k\times j=-i$

B×A= $(A_yB_z - A_zB_y)i + (A_zB_x - A_xB_z)j + (A_xB_y - A_yB_x)k$

If $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ and $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ then

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

khalidrokan478@gmail.com

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (a_2 \times b_3 - a_3 \times b_2)\mathbf{i} - (a_1 \times b_3 - a_3 \times b_1)\mathbf{j} + (a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1)$$

If $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$,

the components of C are given by

$C_x = A_y B_z - A_z B_y$

$C_y = A_z B_x - A_x B_z$

$C_z = A_x B_y - A_y B_x$

مثال: اذا كان $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ وكان المتجه A يساوي $A = 3\ i\ - 4\ j$

والمتجه B يساوي $B = -2\ i + 3\ k$

الحل: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (3\ i\ - 4\ j)(-2\ i + 3\ k)$

والتي ، بموجب قانون التوزيع ، تصبح

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{C} =$ [(-4*3)-(0*0)]i-[(3*3)-(0*-2))]j+[(3*0)-(-4*-2)]k

khalidrokan478@gmail.com

= -12i-9j-8k

امثلة متنوعة

مثال لدينا المتجهان $\vec{A} = 3i - 2j$ and $\vec{B} = -i - 4j$

جد

$\vec{A}+\vec{B}$, (b) $\vec{A}-\vec{B}$, (c) $|\vec{A}+\vec{B}|$, (d) $|\vec{A}-\vec{B}|$, and (e) the direction of $\vec{A}+\vec{B}$ and $|\vec{A}-\vec{B}|$.

الحل

$$\text{(a)}\ \vec{A}+\vec{B} = (3i-2j)+(-i-4j) = 2i-6j$$

$$\text{(b)}\ \vec{A}-\vec{B} = (3i-2j)-(-i-4j) = 4i+2j$$

$$\text{(c)}\ |\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{2^2+(-6)^2} = 6.32$$

$$\text{(d)}\ |\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{4^2+2^2} = 4.47$$

(e) For $\vec{A}+\vec{B}$, $\theta = \tan^{-1}(-6/2) = -71.6^\circ = 288^\circ$

For $\vec{A}-\vec{B}$, $\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.6^\circ$

مثال : لدينا المتجه A له مركبات بطول ثلاث وحدات باتجاه السالب للمركبة x والمركبة الثانية بطول وحدتين باتجاه الموجب للمحور y

. (1) عبر عن المتجه بدلالة وحدة المتجه (2) جد مقدار واتجاه المتجه ؟

الحل

$A_x = -3$ units $\quad A_y = 2$units

(1) $A = A_x i + A_y j$

(2) $|A| = [A_x^2 + A_y^2]^{1/2} = [(-3)^2 + (2)^2]^{1/2} = 3.61$ units

(3) $\theta = \tan^{-1}(A_y / A_x) = \tan^{-1}(2/-3) = 33.7^\circ$

مثال : جد الزاوية المحصورة بين المتجهين

$B = i - 2j + 3k \qquad A = 2i + 3j + 4k$

الحل

$\mathbf{A.B} = |A||B| \cos\theta$

$\cos\theta = \mathbf{A.B}/|A||B| = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)/|A||B|$

$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = (2)(1)+(3)(-2)+(3)(4) = 8$

$|A| = [A_x^2 + A_y^2 + A_z^2]^{1/2} | = [(2)^2 + (3)^2 + (4)^2]^{1/2} = [29]^{1/2}$

$|B| = [B_x^2 + B_y^2 + B_z^2]^{1/2} | = [(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2]^{1/2} = [14]^{1/2}$

$\cos\theta = 8/([29]^{1/2}[14]^{1/2}) = 0.397$

$\theta = \cos^{-1}(0.397) = 66.6°$

مثال : يتم إعطاء متجهين في المستوى بواسطة المعادلات

A = $2i + 3j$ **and B =** $-i + 2j$ **.**

Find A×B and verify that A×B = -B× A

الحل

$$\mathbf{A\times B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{A\times B} = [(3*0)-(0*2)]i-[(2*0)-(0*-1)]j+[(2*2)-(3*-1)]k$

$\mathbf{A\times B} = [(4)-(-3)]k = 7k$

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \mathrm{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

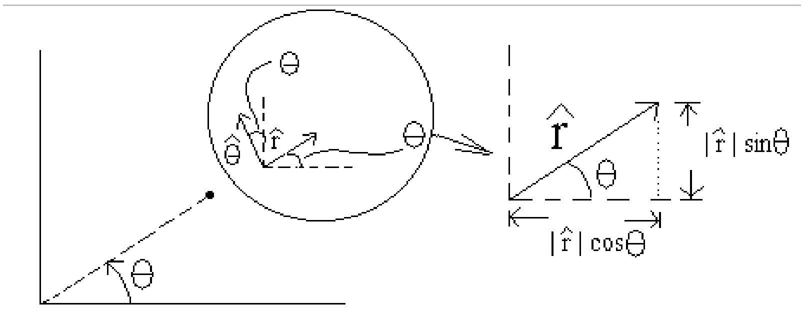
$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = [(-1)(3)-(2)(2)]\mathrm{k} = -7\mathrm{k}$$

كلذ $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathbf{A}$

الإحداثيات القطبية

حتى الآن ، ناقشنا المتجهات بدلالة الإحداثيات الديكارتية ، أي نظام إحداثيات x-y. تم توجيه أي من المتجهات المستخدمة في هذا الإطار المرجعي على طول أو الإشارة إلى محاور الإحداثيات. ومع ذلك ، هناك نظام إحداثيات آخر ، غالبًا ما يتم مواجهته وهو نظام الإحداثيات القطبية.

في الإحداثيات القطبية ، يحدد المرء طول الخط واتجاهه فيما يتعلق ببعض الخطوط الثابتة. في الشكل ، يتم تحديد موضع النقطة من خلال المسافة التي تفصلها عن الأصل ، أي r ، وموضع الخط عند بعض الزوايا ، من خط ثابت كما هو موضح. تعرف الكميات r بالإحداثيات القطبية للنقطة



$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

لنفترض أن الطائرة تستهدف الشرق بسرعة 200 ميل / ساعة بينما تهب الرياح شمالًا بسرعة 80 ميل / ساعة. أوجد سرعة المستوى بالنسبة إلى الراصد على الأرض؟

khalidrokan478@gmail.com

المحلول

سرعة الطائرة بالنسبة للهواء هي ، ، 200 ميل / ساعة باتجاه الشرق وسرعة الهواء بالنسبة إلى الأرض هي ، ، 80 ميل / ساعة باتجاه الشمال. بعد ذلك ، نلاحظ أن متجهات السرعة هي زوايا قائمة. نظرًا لكونهما في زوايا قائمة ،

فإن سرعة المستوى بالنسبة إلى الأرض على النحو التالي:

$v_{pe} = (v^{2} + v^{2})^{1/2}$, then $v = (200^2 + 80^2)^{1/2} = 215$ mi/h

الزاوية التي تطير بها الطائرة في اتجاه N من E هي

$\tan\theta = 80/200 = 0.4$

$\theta = \tan^{-1}(0.4) = 21.8°$