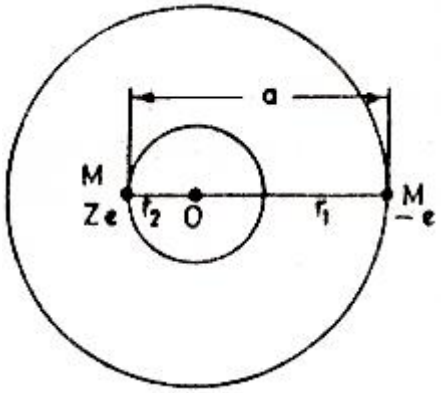
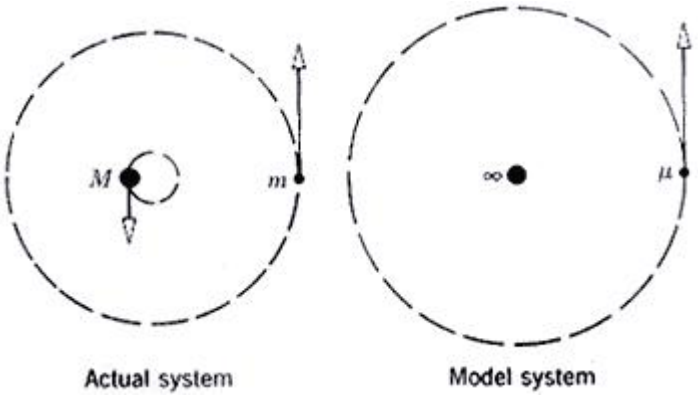
1- الكتلة المختزلة Reduced Mass

من المحاضرات السابقة تم التعامل مع كتلة النواة على انها كبيرة جداً اي لا نهائية الكتلة بالمقارنة مع كتلة الإلكترون وتم التعامل مع كتلة النواة على انها ثابتة ولا تتحرك في الفراغ. وهذا تقريب جيد يمكن استخدامه لذرة الهيدروجين التي تحتوي على اقل كتلة نواة وان هذه الكتلة تساوي ٢٠٠٠ مرة كتلة الإلكترون. ولكن من نتائج القياسات الطيفية المنبعثة من من ذرة الهيدروجين والتي تكون دقيقة للغاية فإنه بمقارنة نتائج هذه القياسات مع القيم المتوقعة من فرضية بور لذرة الهيدروجين نجد أن هناك اختلاف قليل بين القياسات العملية والقيم المتوقعة من فرضية بور وهذا أدى إلى انه يجب التعامل مع كتلة النواة على انها محدودة وان كل من الإلكترون والنواة تتحركان حول مركز ثقل كتلة الذرة كما في حالة حركة الكواكب. وهنا سوف نعتبر ان الإلكترون يتحرك بالنسبة للنواة كما لو ان الكتلة النواة ثابتة وان كتلة الإلكترون m قد اختزلت إلى قيمة μ تسمى الكتلة المختزلة Reduced Mass للذرة وعليه سوف نتعامل مع كتلة الإلكترون على أنها هي الكتلة المختزلة والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$ where M is the mass of the nucleus and m is the mass of the electron

---





ولاثبات هذه العلاقة نفترض ان كلاً من الإلكترون والنواة تدوران حول مركز الثقل الموضح بالشكل المبين O حيث ان نصف قطر دوران الإلكترون حول مركز الثقل هو r_1 وان نصف قطر دوران النواة حول مركز الثقل هو r_2 ومن نظرية مركز الثقل نعلم ان $mr_1=Mr_2$ فإذا كان a تمثل المسافة بين النواة والإلكترون.

$$r_1 = a - r_2 = a - mr_1/M \quad (1)$$
$$r_1 = aM/(M+m)$$

and

$$r_2 = mr_1/M = am/(M+m) \quad (2)$$

وحيث أن الكتلتين تدوران في مسار دائري فإن قوة التجاذب تتساوى مع قوة الطرد المركزي لكل من الكتلتين.

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o a^2} = \frac{Mv^2}{r_2}$$ For the Nucleus

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o a^2} = \frac{mv^2}{r_1}$$ For the electron

ومن حساب طاقة الحركة لكل من الإلكترون والنواة نجد ان

Total K.E. = $1/2\ mv^2 + 1/2\ MV^2$

where $v = \omega r_1$ and $V = \omega r_2$

there for the total K.E. = $1/2\ m\omega^2 r_1^2 + 1/2\ M\omega^2 r_2^2$

بالتعويض في المعادلة السابقة عن r_1 و r_2 بالمعادلتين (١) و (٢) نحصل على

$$K.E = \frac{1}{2}\left[\frac{mM}{m+M}\right]\omega^2 a^2$$

$$K.E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 a^2$$ **therefore,** $$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

وهذه هي الكتلة المختزلة reduced mass وهي اقل من كتلة الإلكترون بـ 1/(1+m/M)

تعديل نموذج بور ليأخذ في الحسبان الكتلة المختزلة

مما سبق مناقشته فإن فرضية نموذج بور والمتعلقة بالعزم الزاوي للذرة orbital angular momentum L تصبح بالصورة التالية:

$$\mu v r = n\hbar$$

حيث تم استبدال كتلة الإلكترون بالكتلة المختزلة.

وبعمل هذا الاستبدال لكتلة الإلكترون بالكتلة المختزلة في كل المعادلات التي حصلنا عليها من فرضيات بور لتصحيح افتراض بور ان كتلة النواة لانهائية فإننا سنحصل على النفس معادلات بور مع استبدال كتلة الإلكترون بالكتلة المختزلة وبالتركيز على معادلة مقلوب الطول الموجي للطيف المنبعث من الذرة فإنها تصبح على النحو التالي:

$$\frac{1}{\lambda} = R_M Z^2 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

where $$R_M = \frac{M}{m+M} R_\infty = \frac{\mu}{m} R_\infty$$

في الأمثلة التالية سوف يتضح تأثير التعامل مع الكتلة المختزلة على ذرات شبيهة بذرة الهيدروجين على الطيف المنبعث وعلى مستويات الطاقة.

Example (1):
Consider a positronium atom consisting of a positron and electron revolving about their common center of mass half way between them, If such a system were a normal atom (a) How would its emission spectrum compare to that of the hydrogen atom? (b) What would be the radius of the ground state orbit of positronium?

نحسب الكتلة المختزلة لهذه الذرة

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$$ where M=m for Positron

نحسب ثابت ريدبيرغ لهذه الذرة

$$R_M = \frac{m}{m+m} R_\infty = \frac{R_\infty}{2}$$

Positronium (Ps) is a system consisting of an electron and a positron.

تكون مستويات الطاقة من معادلة بور هي

$$E_{positronium} = -\frac{R_M hcZ^2}{n^2} = -\frac{R_\infty hcZ^2}{2n^2}$$

تكون المعادلة التي تعطي مقلوب الأطوال الموجية لطيف ذرة البوزيترونيوم هي

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{R_\infty}{2} Z^2 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

وهذا يعني ان التردد المنبعث يكون اقل بمقدار النصف بالمقارنة بتردد طيف ذرة الهيدروجين او ان الطول الموجي يكون ضعف الطول الموجي المقابل له في ذرة الهيدروجين.

اما بالنسبة لنصف قطر المدار الأول

$$r_{positronium} = \frac{4\pi\varepsilon_o n^2\hbar^2}{\mu Ze^2} = 2\frac{4\pi\varepsilon_o n^2\hbar^2}{mZe^2} = 2r_{hydrogen}$$

وهذا يعني ان نصف قطر المدار الأول في ذرة البوزيترونيوم اكبر بمقدار مرتين منه في ذرة الهيدروجين.

Example (2) :

A muonic atom contains a nucleus of charge Ze and a negative muon moving about it. The muon is an elementary particle with charge -e and a mass is 207 times as large as an electron mass. Such an atom is formed when a proton captures a muon. (a) Calculate the raduis of the first Bohr orbit of a muonic atom with Z=1. (b) Calculate the binding energy of muonic atom with Z=1. (c) What is the wavelength of the first line in the Lyman series for such an atom?

حيث ان كتلة النواة هي ١٨٣٦ كتلة الإلكترون وكتلة الميون ٢٠٧ كتلة الإلكترون فإن الكتلة المختزلة لذرة muonic

Z=1 so that M= mass of 1 proton
M=1836 me
and m=207 me

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{207\,m_e \times 1836\,m_e}{207\,m_e + 1836\,m_e} = 186\,m_e$$

بالتعويض عن كتلة الإلكترون في معادلة بور التي تحسب نصف قطر المدار بالكتلة المختزلة نحصل على

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_o n^2\hbar^2}{186\,m_e Ze^2} = \frac{1}{186} \times 5.3\times10^{-11}\,m = 2.8\times10^{-13}\,m$$

وهذا يعني ان الميون يدور في مدار قريب جداً من النواة.

اما بالنسبة لطاقة الربط لذرة muonic تكون

$$E_{muonic} = -186\,\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2 2\hbar^2} = -186\times13.6eV = -2530\,eV$$

وهذه طاقة ربط كبيرة جداً بالمقارنة بطاقة الربط في ذرة الهيدروجين.

أما بالنسبة للطول الموجي الأول في سلسلة Lyman فهي تحسب من معادلة ريدبيرغ

$$\frac{1}{\lambda} = R_M Z^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

بالتعويض عن n_i=٢ و n_f=١ .

$$\frac{1}{\lambda} = 186\,R_\infty\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 139.5R_\infty$$

R_∞=109737cm^{-1} $\longrightarrow$ λ =6.5 Å

وهذا يعني ان الخط الطيفي الأول في سلسلة Lymen لذرة muonic يقع فى مجال طيف اشعة اكس.