وهذا يعني ان التردد المنبعث يكون اقل بمقدار النصف بالمقارنة بتردد طيف ذرة الهيدروجين او ان الطول الموجي يكون ضعف الطول الموجي المقابل له في ذرة الهيدروجين.

اما بالنسبة لنصف قطر المدار الأول

$$r_{positronium} = \frac{4\pi\varepsilon_o n^2\hbar^2}{\mu Ze^2} = 2\frac{4\pi\varepsilon_o n^2\hbar^2}{mZe^2} = 2r_{hydrogen}$$

وهذا يعني ان نصف قطر المدار الأول في ذرة البوزيترونيوم اكبر بمقدار مرتين منه في ذرة الهيدروجين.

Example (2) :

A muonic atom contains a nucleus of charge Ze and a negative muon moving about it. The muon is an elementary particle with charge -e and a mass is 207 times as large as an electron mass. Such an atom is formed when a proton captures a muon. (a) Calculate the raduis of the first Bohr orbit of a muonic atom with Z=1. (b) Calculate the binding energy of muonic atom with Z=1. (c) What is the wavelength of the first line in the Lyman series for such an atom?

حيث ان كتلة النواة هي ١٨٣٦ كتلة الإلكترون وكتلة الميون ٢٠٧ كتلة الإلكترون فإن الكتلة المختزلة لذرة **muonic**

Z=1 so that M= mass of 1 proton
M=1836 me
and m=207 me

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{207\, m_e \times 1836\, m_e}{207\, m_e + 1836\, m_e} = 186\, m_e$$

بالتعويض عن كتلة الإلكترون في معادلة بور التي تحسب نصف قطر المدار بالكتلة المختزلة نحصل على

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_o n^2\hbar^2}{186\, m_e Ze^2} = \frac{1}{186}\times 5.3\times 10^{-11} m = 2.8\times 10^{-13} m$$

وهذا يعني ان الميون يدور في مدار قريب جداً من النواة.

اما بالنسبة لطاقة الربط لذرة **muonic** تكون

$$E_{muonic} = -186\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2 2\hbar^2} = -186\times 13.6 eV = -2530\ eV$$

وهذه طاقة ربط كبيرة جداً بالمقارنة بطاقة الربط في ذرة الهيدروجين.

أما بالنسبة للطول الموجي الأول في سلسلة **Lyman** فهي تحسب من معادلة ريدبيرغ

$$\frac{1}{\lambda} = R_M Z^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

بالتعويض عن n_i=٢ و n_f=١ .

$$\frac{1}{\lambda} = 186 R_\infty\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 139.5 R_\infty$$

R_∞=109737cm^{-1} $\longrightarrow$ **λ =6.5 Å**

وهذا يعني ان الخط الطيفي الأول في سلسلة **Lymen** لذرة **muonic** يقع فى مجال طيف اشعة اكس.

Example (3):
Deuterium atom is a hydrogen atom whose nucleus contains a proton and a neutron. How does the doubled nuclear mass affect the atomic spectrum ?

اذا لم نكن نستخدم الكتلة المختزلة لتوقعنا ان الطيف المنبعث من ذرة الهيدروجين وذرة الديتيريوم متطابقين ولكن في حالة ذرة الديتيريوم فإن كتلة النواة ضعف كتلة نواة ذرة الهيدروجين وهذا سوف يؤدي إلى اختلاف الطيف المنبعث عن كلا الذرتين. من خلال حساب ثابت رايدبيرغ في حالة ذرة الهيدروجين نجد ان

$$R_H = \frac{\mu}{m} R_\infty = \frac{R_\infty}{\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \frac{109737\ cm^{-1}}{\left(1+\frac{1}{1836}\right)} = 109678\ cm^{-1} \qquad \textit{for Hydrogen}$$

أما في حالة ذرة الديتيريوم فإن ثابت ريدبيرغ يكون

$$R_D = \frac{\mu}{m} R_\infty = \frac{R_\infty}{\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \frac{109737\ cm^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2\times 1836}\right)} = 109707\ cm^{-1} \qquad \textit{for Deuterium}$$

ومن مقارنة القيمتين نجد أن R_D أكبر من R_H وهذا يؤدي إلى الاستنتاج بأن طيف ذرة الديتيريوم سيكون مزاح ناحية اطوال موجية اقل.

2- قاعدة التكميم Quantization Rules

ان النجاح الذي حققته فرضية بور لتركيب الذرة واتفاقها مع نتائج التجارب العملية كان له الأثر الكبير في قبول هذه الفرضية وانتشارها ولكن بقى سؤال وهو ما علاقة مبدأ تكميم العزم الزاوي المداري للإلكترون حول النواة الذي بنى عليه بور فرضيته وفرضية بلانك بتكميم الطاقة الكلية لجسم (إلكترون) يتحرك حركة توافقية بسيطة. في عام ١٩١٦ قام العالمان ويلسون وسمرفيلد **Wilson and Sommerfeld** بوضع تفسير لهذا السؤال من خلال انشاء أنقاعدة لتكميم أي نظام فيزيائي تكون احداثياته دالة دورية في الزمن. هذه القاعدة تم استخدامها لتفسير تكميم بلانك للطاقة وكذلك تكميم بور للعزم الزاوي المداري، كما كان لها العديد من التطبيقات في نظرية الكم. وتنص قاعدة التكميم:

Quantization Rules
For any physical system in which the coordinates are periodic function of time, there exists a quantum condition for each coordinate, these quantum conditions are:

$$\oint p_q dq = n_q h$$

where q is one of the coordinate, p_q is the momentum associated with that coordinate, n_q is the quantum number which take integral values. and $\oint$ means that the integration is taken over one period of the coordinate q.

لشرح هذه القاعدة سوف نقوم بذلك من خلال شرح المثال التالي:

نفرض جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة في بعد واحد طاقته الكلية **E** تحسب على النحو التالي

$$E = K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

since p=mv ➨ $mv^2/2=p^2/2m$

$$E = K + V = \frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$