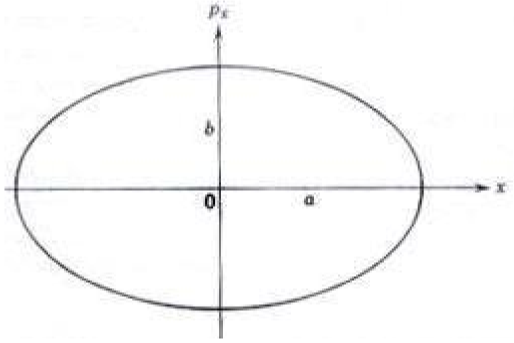
$$\frac{p_x^{\ 2}}{2mE}+\frac{x^2}{2E/k}=1$$

وبالتمثيل الهندسي لهذه المعادلة نجد ان العلاقة بين p_x و x هي معادلة **Ellipse** كما يلي

$$\frac{P_x^{\ 2}}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

where (a) and (b) is the semiaxis of the ellipse, $a=\sqrt{2E/k}$ $b=\sqrt{2mE}$



Phase space diagram of the motion of the linear S.H.O

لإيجاد قيمة التكامل $\oint p_q dq$ وهو الطرف الأيسر من قاعدة التكميم سنستعين بالشكل الموضح أعلاه والذي يمثل العلاقة بين كمية الحركة الخطية p_x والإزاحة x وهي بالتمثيل الهندسي لها تكون على شكل معادلة ellipse وتعطي معلومات عن مقدار كمية الحركة الخطية عند أي ازاحة حيث يمثل المحور الأفقي الإزاحة x والمحور الرأسي كمية الحركة p_x وهذه الإحداثيات (x,p_x) تسمى بـ phase space والشكل أعلاه يسمى phase diagram للجسم المتحرك حركة توافقة في بعد واحد.

نلاحظ أن قيمة التكامل $\oint p_q dq$ هي المساحة المحصورة داخل محنى ellipse والتي تساوي

$$\text{area of ellipse} = \oint p_q dq = \pi ab$$

بالتعويض عن قيمة a وقيمة b

$$\oint p_x dx = \pi ab$$

$$\oint p_x dx = \frac{2\pi E}{\sqrt{k/m}}$$

$$\because \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

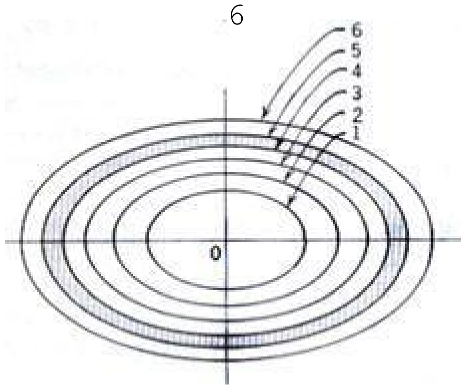
بالتعويض في المعادلة نحصل على

$$\oint p_x dx = \frac{2\pi E}{2\pi\nu}$$

بمساواة المعادلة مع الطرف الأيمن لمعادلة التكميم نحصل على

$$\oint p_x dx = \frac{E}{\nu} = n_x h = nh$$

وتكون قيمة الطاقة الكلية للجسم الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة في بعد واحد هي $E = nh\nu$ وهذه هي نفسها قانون التكميم لبلانك.



لاحظ ان مستويات الطاقة المتاحة لحركة الجسم في هذه الحالة تمثل بسلسلة من الـ ellipses في space phase وأن المساحة المحصورة بين أي شكلين بيضاويين متعاقبين هي ثابت بلانك h. وفي الحالة الكلاسيكية تؤول قيمة h الى الصفر وتكون كل حالات الطاقة مسموحة ولا نلاحظ التكميم لمستويات الطاقة.

اشتقاق الفرضية الثالثة لنموذج بور

باستخدام قاعدة ويلسون سمرفيلد للتكميم يمكن اشتقاق العلاقة التي بنى عليها بور فرضيته الثالثة وهي ان العزم الزاوي المداري $L=nh/2\pi$، افترض ان الكترون يدور في مدار دائري حول النواة نصف قطره r وأن الزاوية θ الأحداثي الزاوي الذي يتغير بدالة دورية مع الزمن حيث ان الإلكترون يعيد نفسه كل زاوية مقدارها ٣٦٠ درجة ويكون العزم الزاوي L ثابت

$$L = mvr = \text{constant}$$

بتطبيق قاعدة التكميم

$$\oint p_q dq = n_q h \longrightarrow \oint L d\theta = nh \longrightarrow \oint L d\theta = L\oint_0^{2\pi} \theta = 2\pi \longrightarrow 2\pi L = nh \longrightarrow L = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

وهذه هي نفس الفرضية التي طبقها بور في نموذج الذرة

المعنى الفيزيائي للفرضية الثالثة لبور

ان المعنى الفيزيائي لفرضية بور علمت في ١٩٢٤ من خلال فرضية دبرولي DeBroglie والتي تحدد الموجة المصاحبة للجسيم المادي من خلال المعادلة

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

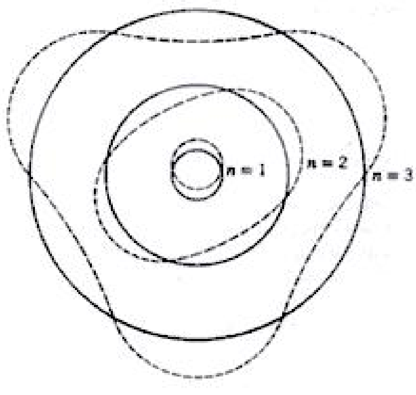
يمكن كتابة فرضية بور على النحو التالي:

$$L = mvr = pr = nh/2\pi \qquad n=1,2,3,\ .....$$

حيث p هي كمية الحركة الخطية للإلكترون في مداره المسموح به والذي نصف قطره r، وبالتعويض عن p بمعادلة ديبرولي نحصل على

$$\frac{hr}{\lambda} = \frac{nh}{2\pi} \qquad 2\pi r = n\lambda \qquad \text{where } n=1,2,3,\ ......$$

وهذه المعادلة هي التي تعطي التفسير الفيزيائي لفرضية بور الاولى والتي تشير إلى أن المدار المسموح للإلكترون ان يتواجد به هي تلك المدارات التي يكون محيطها يساوي عدد صحيح من الطول الموجي لديبرولي.



إن هذا الشرط يعني ان الإلكترون في مداره حول النواة والمتحرك بسرعة ثابتة تكون له موجة مصاحبة ذات طول موجي محدد من فرضية ديبرولي وعند اكمال دورة حول النواة فإن الموجة المصاحبة للإلكترون ستعيد نفسها فإذا كان محيط المدار مساوي لعدد صحيح من الطول الموجي فهذا يعني ان الموجات المتراكبة الناتجة عن اكمال عدة دورات حول النواة ستكون في نفس الطور in phase اما إذا كان محيط المدار لا يساوي عدد صحيح من الطول الموجي فإن الموجات المتراكبة ستلغي بعضها البعض وتكون الموجة المصاحبة في هذه الحالة صفر وهذا يعني انه لا يوجد الكترون وان المدار غير متاح للالكترون ان يتواجد به.