العلاقة بين C_p و C_V للغاز المثالي:

لو وضع الغاز داخل مكبس متحرك مساحة المكبس (A) وازيح مسافة مقدارها (dx) نتيجة لتزويد الغاز بكمية من الحرارة مقدارها (dQ) وهذا يعني ان حجم الغاز قد ازداد من V الى (dV) نتيجة ارتفاع درجة الحرارة من T الى (dT) فأن القوة التي يسلطها على المكبس يساوي (PA) والتي ستنجز شغلا (Dw)

$$dW = PAdx = PdV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

كمية الحرارة (dQ) ستؤدي الى رفع درجة حرارة مول واحد من الغاز درجة حرارية واحدة عند ثبوت الضغط

$$dQ= C_p\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اما الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة مول واحد من الغاز درجة حرارية واحدة عند ثبوت الحجم فانها ستؤدي الى رفع طاقته الداخلية (dU)

$$du= C_V\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

باستخدام القانون الاول للترموداينمك

$$dq= du+dw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$C_p\, Dt=C_V\, dt+ PdV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

وعندما نطبق القانون العام للغاز المثالي لمول واحد من الغاز

$$PV= RT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$P(V+dv) =R(T+dt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$PdV=RdT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$C_p\, dt=C_V\, dt+ RdT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

بالتعويض بالمعادلة (٥) نجد ان

$$C_p - C_V = R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

والتي تساوي (8.314 J/K. mole) او تقريبا تساوي (2 cal/K. mole) وهكذا نجد ان C_p اكبر من C_V بحوالي (2cal/K.mole)

مثال/

جد الحجم الذي يشغله جزيء كيلو غرامي واحد من غاز النتروجين عند الظروف القياسية من ضغط ودرجة حرارة علما ان الكتلة الجزيئية تساوي ٢٨

الحل/

$P= 1*10^5\ N/m^2$

$T = 273\ K$

$PV=nRT$

$V=\frac{nRT}{P}$; n=1; R= 8314 J/kg.mole.K

$V= \frac{1*8314*273}{1*10^5} = 22.4\ m^3$

مثال/

جد قيمة الثابت العام للغازات باستخدام معلومات المثال السابق

الحل/ من قانون الغاز المثالي $PV=nRT$

وبالتعويض عن قيم n, P, V, T نجد ان $R=\frac{PV}{nT}$

$R= \frac{1*10^5*22.4}{273} = 8314\ J/kg.\ mole.\ K$

لحساب C_p, C_V للغاز المثالي (احادي الذرة):

ان الزيادة في الطاقة الداخلية Du لمول واحد من الغاز تحت الحجم الثابت نتيجة لأرتفاع درجته بمقدار dT تعطى بالعلاقة التالية

$dU=C_v\ dt$ ..... (!)

بما ان الطاقة الداخلية للغاز المثالي احادي الذرة تتكون كليا من الطاقة الحركية الانتقالية نجد

$dU= 3/2\ RdT$ .....(2)

$C_v = 3/2\ R$ .....(3)

وبما أن :

$R= 8.314\ J/K.\ kg.\ mole$

$C_V = 12.5$ J/mole.K .....(4)

$C_P = C_V + R$ ››››› $C_P = R + 3/2\ R = 5/2\ R$

$C_P = 20.8$ J/mole.K .....(5)

وللغاز المثالي ثنائي الذرة نجد ان

$C_V = 3/2\ R + R = 5/2\ R$

$C_P = 5/2\ R + R = 7/2\ R$

مثال/

جد قيمة كل من C_P , C_V , R لغاز الأوكسجين اذا علمت ان نسبة C_P الى C_V تساوي ١.٤ وكثافة الأوكسجين تحت الظروف القياسية $1.43\ kg/m^3$ و الكتلة المولية $32*10^{-3}\ kg/mole$

الحل /

$PV = nRT$; $n = 1$

$PV = RT$; $V = m/\rho$ ››››› $R = \frac{PV}{nT}$

$R = \frac{Pm}{\rho T} = \frac{1*10^5 * 32*10^{-3}}{273} = 8.28$ J/kg. mole .K

$C_P - C_V = R$

$C_P - C_V = 8.314$ ››››› $C_P = C_V + 8.314$

$C_P / C_V = 1.4$; $1.4\ C_V - C_V = 8.314$; $C_V = 20.8$ J/mole .K

$C_P = 20.8 + R = 20.8 + 8.314 = 29.1$ J/mole .K