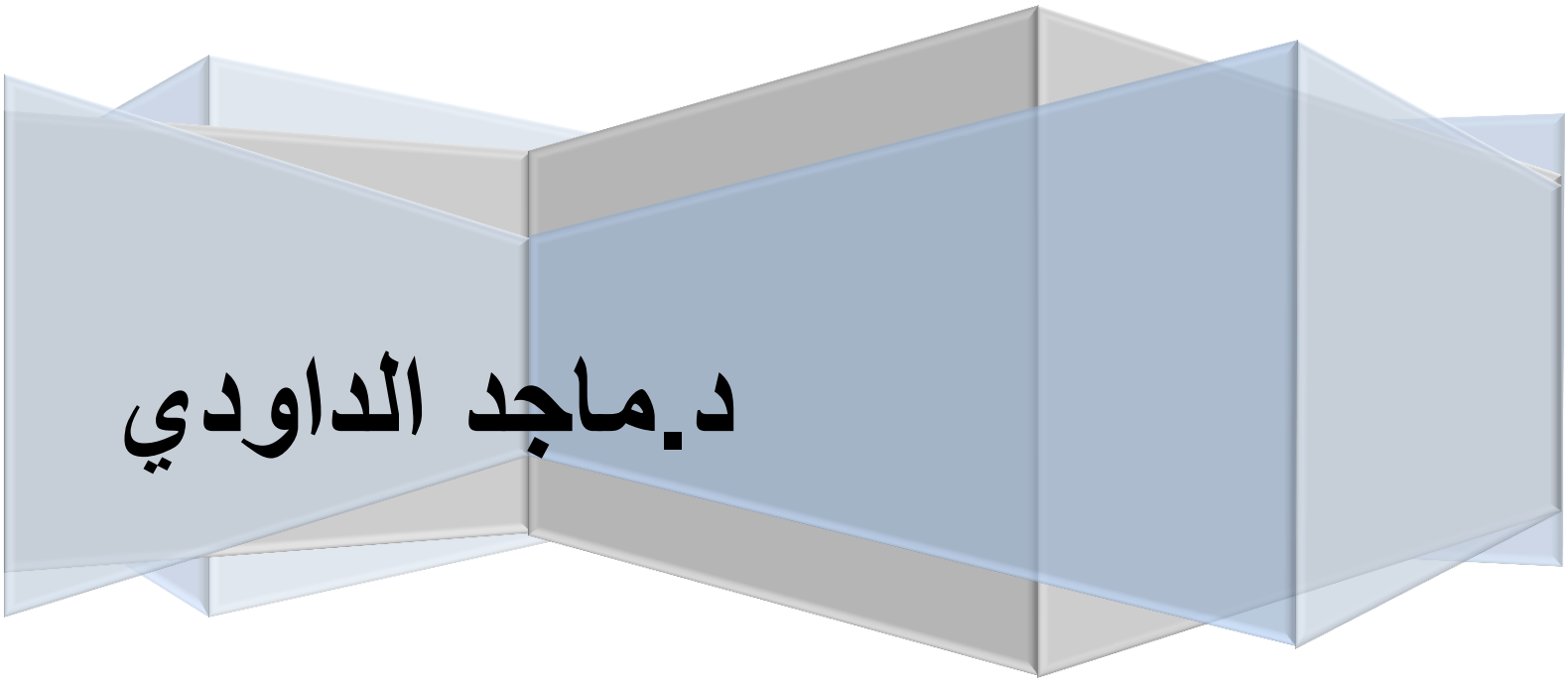
المحاضرة 8 (تكاليف الاجل الطويل)

المرحلة الثالثة



د.ماجد الداودي

دالة التكاليف الاجل الطويل

Long Run Cost Function

يتحقق السلوك الامثل للمنتج والذي يحقق الكفاءة الاقتصادية بتحديد حجم الناتج الذي يحقق احسن مستوى من الدخل الصافي. ففي الاجل القصير يختلف حجم الناتج الذي يحقق ادنى مستوى من متوسط التكاليف (لكن لا يحقق الكفاءة الاقتصادية) عن حجم الناتج الذي يحقق احسن مستوى من الدخل الصافي (الذي يحقق الكفاءة الاقتصادية) اذ غالباً ما يكون حجم الناتج الذي يحقق ادنى مستوى من متوسط التكاليف اقل من حجم الناتج المحقق للكفاءة الاقتصادية.

اما في الاجل الطويل فيتوافق حجم الناتج المحقق للكفاءة الاقتصادية مع حجم الناتج المحقق لأدنى متوسط كلفة وبذلك لا يختلف في الاجل الطويل هذان الحجمان من الناتج كما هو الحال في الأجل القصير، وغالباً ما يحدث الخلط في هذه الحالة عند بعض الاقتصاديين.اما دالة التكاليف فيتم اشتقاقها بصورة مباشرة من خلال العلاقة بين كمية الانتاج والتكاليف المرافقة لها او بصورة غير مباشرة كما هو واضح في الصيغ العامة الاتية:

دالة الانتاج $Q= f (X_1, X_2)$

معادلة الكلفة $C = r_1X_1 + r_2 X_2 +b$

معادلة الممر التوسعي $O = g (x_1, x_2)$

اذ ان: (x_1, x_2) **تمثل المدخلات**

Q يمثل الانتاج الكلي

C **يمثل الكلفة الكلية**

(r_1, r_2) **تمثل اسعار الموارد**

b **تمثل التكاليف الثابتة**

يختزل هذا النظام من المعادلات الى معادلة واحدة مفردة يعبر فيها عن التكاليف كدالة لمستوى الانتاج واسعار عناصر الانتاج وتكاليف العناصر الثابتة كما في المعادلة الاتية:

$$\mathbf{C = Ø\ (q, r_1, r_2) + b}$$

وبافتراض ثبات الاسعار فان دالة التكاليف الكلية تصبح كالاتي:-

$$\mathbf{C = Ø\ (q) + b}$$

وبما انه تم استخدام دالة الكلفة التكعيبية لسهولة التحليل الا ان ذلك لم يكن كافياً لاعتمادها في الدراسة دون خضوعها للاختبارات النظرية المختلفة.

اما دوال متوسطات الكلفة والكلفة الحدية فهما من الدرجة الثانية اذ تتناقص اولاً ثم تبدأ بالزيادة عند زيادة الانتاج وهي الاخرى تعتمد على درجة التجانس لدالة الانتاج او درجة تحقق الوفورات.

اما التكاليف الثابتة فانها لا تؤثر في قرارات المنتج فيما يتعلق بالامثلية، لانها تدفع بغض النظر عن مستوى الانتاج وتظهر كحد ثابت في دالة الربح.

$$\mathbf{\Pi = p.\ Q - ø\ (q) - b}$$

وعليه فان الشرط الاول (MC = p)والشرط الثاني $\frac{\partial MC}{\partial q} > 0$ ()في تعظيم الربح يعبر عنه من خلال الكلفة الحدية (**MC**). وان المستوى التوازني للانتاج لا يتأثر بحجم التكاليف الثابتة بل بالتكاليف المتغيرة فقط وهذا التحليل يتم في المدى القصير.

اما في المدى الطويل فان كافة عناصر الانتاج تصبح قابلة للتغير، لهذا فان تغير الانتاج يتأثر بتغير عناصر الانتاج جميعها ومنها حجم الجهاز الانتاجي

(المنشأة) (**Plant size**) والذي سيمثل بالرمز (**A**) وهو يمثل مساحة الارض في هذه الدراسة.

نفرض (**A**) متغير مستمر ويدخل بشكل صريح في دالة الانتاج ومعادلة التكاليف ومعادلة الممر التوسعي بدلاً من (**b**) التكاليف الثابتة، اذ اصبح متغيراً هنا كما موضح في ادناه على التوالي.

دالة الانتاج $Q = f(x_1, x_2, A)$

معادلة التكاليف $C = r_1x_1 + r_2x_2 + V(A)$

دالة الممر التوسعي $O = g(x_1, x_2, A)$

اذ يعبر (A) عن التكاليف الثابتة كدالة متزايدة مع حجم المزرعة في المدى الطويل، بمعنى ان المشتقة الاولى لهذه الدالة موجبة $O < V(A)$ وان شكل منحنى الناتج المتساوي وخط التكاليف المتساوي وشكل الممر التوسعي يعتمد على قيمة A بشكل عام وعموماً يمكن كتابة دالة التكاليف كالاتي:-

$$C = g(q, A) + V(A)$$

أي ان التكاليف هي دالة لمستوى الانتاج (**q**) وحجم المنشأه (**A**).

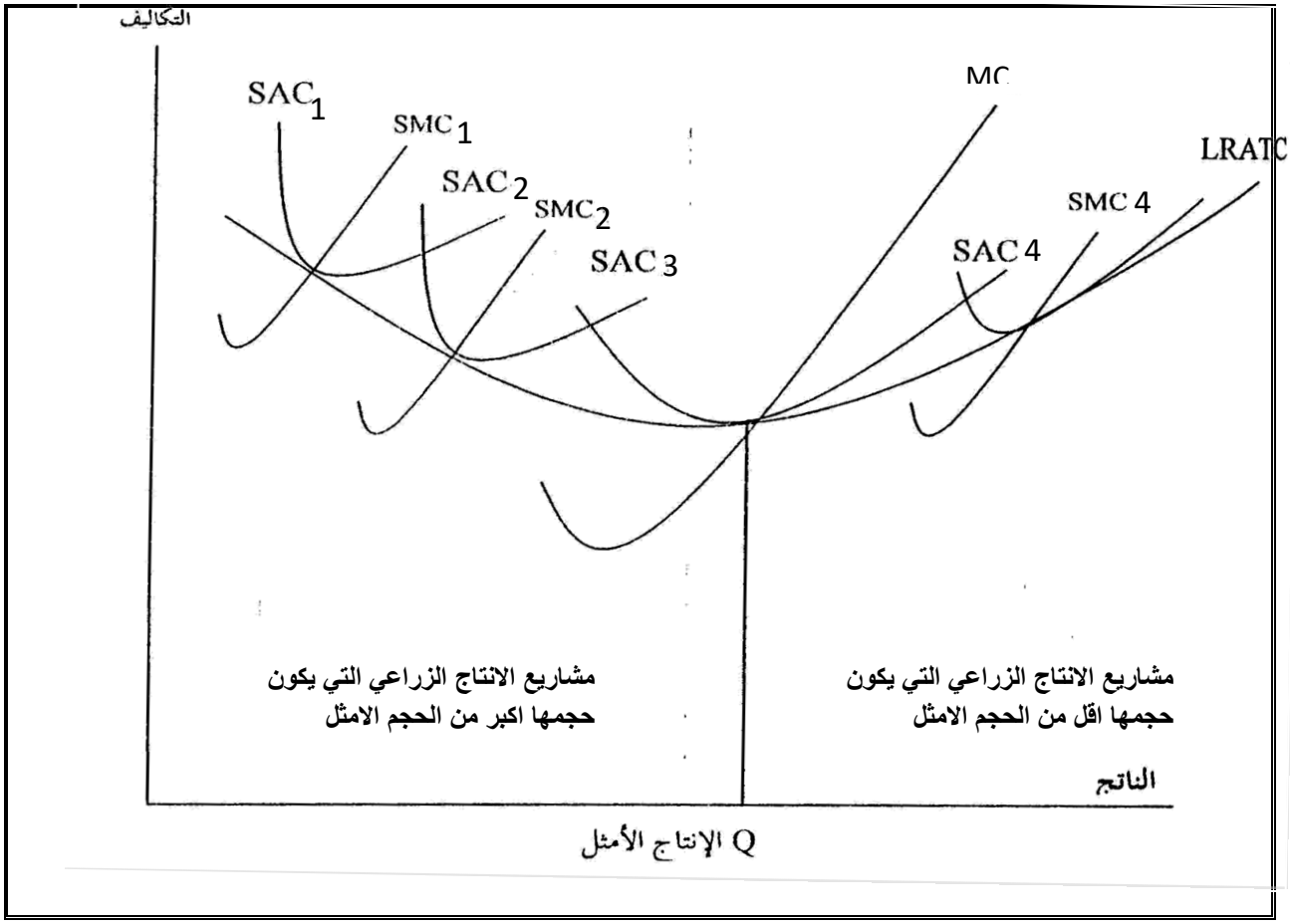
وهذه الدالة تضم مجموعة من منحنيات التكاليف الكلية المتكونة من تخصيص قيم مختلفة للمتغير **A** ولكن بمجرد ان يختار المنتج حجماً معيناً لنشاطه الانتاجي مثل $A = A_O$ فانها تتحول الى دالة قصيرة الاجل.

دالة التكاليف في المدى الطويل هي الدالة التي تعطي التكلفة الدنيا لانتاج الكميات المختلفة من السلعة. ومنحني التكاليف في المدى الطويل هو المحل الهندسي للنقاط الممثلة لمتوسط التكاليف الدنيا لانتاج الكميات المختلفة من السلعة عند احجام مختلفة ،وهو عبارة عن الغلاف لمنحنيات متوسط التكلفة في المدى

القصير الذي يمس كل واحد منها في ادنى نقطة لها الا انه لا يتقاطع مع أي منها كما موضح في الشكل.

ان المنحنى المناسب لاتخاذ القرارات هو منحنى التكلفة للامد القصير لانه ليس من الضروري ان يحتفظ المشروع الزراعي بانتاجه على منحنى تكلفة المدى الطويل لانه عند تحديد الحجم في SAC1 او SAC2 فانه يمكن زيادة الانتاج باستخدام موارد صغيرة اضافية مع الموارد الثابتة التي تمثل حجم المشروع في المدى القصير .

شكل منحنيات متوسط الكلفة الكلية في الأجل القصير والطويل



يمكن للمنتج ان يحقق زيادة في الكفاءة الفنية في فترة الاجل القصير عن طريق التوسع العمودي بما يحقق اهدافه الا انه غالباً ما يهدف الى زيادة الكفاءة من خلال التوسع الافقي والعمودي وهذا يتم في مدة الاجل الطويل وفي هذه المرحلة يكون قادراً على تغيير مدخلات الانتاج الثابتة ومنها حجم منشأته لذا فان فترة الاجل الطويل غالباً ما تسمى بفترة التخطيط **(planning period)**

ان تخطيط الانتاج في مدة الاجل الطويل يتضمن حساب كل امكانيات الانتاج وتقويمهما التي يستطيع المنتج انتاجها عندما تكون لديه المرونة في اعادة مزج كمية المدخلات المتاحة.

ويمكن ان تشتق جميع منحنيات التكاليف في الاجل الطويل من دالة الانتاج ولايوجد هناك اختلاف في المفاهيم والاساليب التحليلية لدوال التكاليف والانتاج في الاجل الطويل والقصير. ولكن بما ان جميع المدخلات اصبحت متغيرة في الاجل الطويل فان قانون الغلة المتناقصة لايعمل بعد حين.ومن الناحية التطبيقية قد لا يأخذ منحني متوسط الكلفة للمدى الطويل الشكل التقليدي للمنتجين حرف U.

حيث من الممكن ان تكون هناك اشكال متعدده توضح انواع مختلفة من اقتصاديات او لا اقتصاديات الحجم.

فاذا ما كان منحني متوسط الكلفة للمدى الطويل خطاً مستقيماً فان ذلك يدل على ان كل حجوم المزرعة بامكانها ان تنتج الناتج بمتوسط الكلفة نفسه. وهذه الحالة يطلق عليها ثبات عائد الحجم **Constant returns to size** أي انعدام الوفورات واللاوفورات في هذه الحالة. كما ان هناك حالات يزداد فيها منحني متوسط التكلفة للمدى الطويل بازدياد حجم الناتج أي ما يسمى بتناقص عائد الحجم **Decreasing returns to size** مشيراً بذلك الى لااقتصاديات الحجم عند كل مستوى من الناتج، والعكس فقد تكون هناك حالات تتناقص فيها الكلفة عند كل مستوى من الناتج أي ما يطلق عليها بتزايد عائد الحجم **Increasing returns to size**. ويكون على شكل منحني يتناقص اولاً ثم يثبت لمدى واسعاً من الانتاج واخيراً يتزايد وهذا الشكل يمثل الحالات الثلاث المشار اليها سابقاً.ومن الحالات الشائعة ثبات متوسط الكلفة لمدى واسع من مستويات الانتاج، وفي هذه الحالة فان اقتصاديات الحجم تتحقق فقط عندما تكون المزرعة صغيرة جداً، ولا اقتصاديات الحجم تحصل فقط عند مستويات انتاج كبيرة جداً، ويشير بعض الاقتصاديين الى ان منحنى متوسط الكلفة للاجل الطويل قد يأخذ شكل حرف (**L**) اذا ما تم توسيع حجم الناتج بشكل اكبر، ونظراً لاعتمادنا الصيغة التكعيبية لدالة التكاليف في تحليلنا النظري فانه من المحتمل ان تأخذ التكاليف المتوسطة شكل حرف (**U**) الا ان ذلك خاضع للتغير وفقاً لطبيعة العلاقة موضوع الدراسة.

ومن اجل تحديد منطقة الوفورات واللاوفورات تحديداً دقيقاً يُشتقّ معامل الدالة (R) ومرونة دالة الكلفة الكلية (E) كمؤشرات لذلك .

اقتصاديات الحجم

تتضمن دراسة علاقة حجم الانتاج بالتكاليف الكلية وذلك بتقدير دالة التكاليف الكلية ومنها يشتق منحنى متوسط الكلفة الكلية لتوضيح اقتصاديات الحجم.

ويمكن اشتقاق دالة الكلفة الكلية للاجل الطويل باعتماد دوال الكلفة بالاجل القصير بالصيغة العامة الاتية:-

$$LRTC = b_1Q - b_2Q^2 + b_3Q^3 - b_4QA + b_5A^2 + Ui \text{ --------(1)}$$

$$Q, A > 0$$

اذ ان:

TC تمثل التكاليف الكلية (الف دينار)، Q تمثل كمية الانتاج الكلي لكل مزرعة (طن)، A تمثل المساحة او حجم المزرعة (دونم).

biتمثل معاملات الانحدار

Ui تمثل المتغير العشوائي

وبكتابة المعادلة (1) بشكلها الضمني (implicit form) اذ ان TC دالة ضمنية لـ A, Q نحصل على:-

$$V=LRTC - b_1Q + b_2Q^2 - b_3Q^3 + b_4QA - b_5A^2 - Ui = 0 \text{ ----------(2)}$$

وبأخذ المشتقة الأولى للدالة الضمنية بدلالة المساحة (A) ومساواتها بالصفر نحصل على :

$$\frac{\partial v}{\partial A} = \mathbf{b_4Q - 2b_5A = 0} \text{ ----------(3)}$$

$$\mathbf{A =} \quad \frac{b_4}{2b_5} \quad \mathbf{Q} \text{ ----------(4)}$$

اذ تم الحصول على A بدلالة Q:

وبتعويض قيمة A في الدالة الاصلية (1) نحصل على دالة كلفة الاجل الطويل:

$$\mathbf{LRTC = b_1Q - b_2Q^2 + b_3Q^3 - b_4Q\left(\frac{b_4}{2b_5}Q\right) + b_5\left(\frac{b_4Q}{2b_5}\right)^2 + Ui}$$

$$= b_1Q - b_2Q^2 + b_3Q^3 - \frac{b^2{}_4Q^2}{2b_5} + \frac{b_5b^2{}_4Q^2}{4b^2{}_5}$$

$$= b_1Q - b_2Q^2 + b_3Q^3 - \frac{b^2{}_4Q^2}{2b_5} + \frac{b^2{}_4Q^2}{4b_5}$$

$$= b_1Q - b_2Q^2 + b_3Q^3 - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{b^2{}_4Q^2}{b_5} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{b^2{}_4Q^2}{b_5}$$

$$= b_1Q - b_2Q^2 + b_3Q^3 - \frac{1}{4}\frac{b^2{}_4}{b_5}Q^2$$

$$=b_1Q + b_2Q^2 - (\frac{1}{4})\ \frac{b^2{}_4}{b_5}\ )\ Q^2 + b_3Q^3$$

وبجمع حدود Q^2 ينتج:

$$=b_1Q - (b_2 - \frac{1}{4}\frac{b^2{}_4}{b_5}\ )\ Q^2 + b_3Q^3$$

فتكون الصيغة النهائية لدالة التكاليف الكلية في الاجل الطويل بالصورة الاتية:-

دالة الكلفة الكلية في الاجل الطويل $\mathbf{LRTC = b_1Q - b_2Q^2 + b_3Q^3}$

EX.

لديك دالة الكلفة لمحصول القطن:

$$\mathbf{SRTC = 477.402Q - 6.095Q^2 + 12.566Q^3 - 158.984AQ + 72.070A^2}$$

اشتق دالة الاجل الطويل من الدالة اعلاه.

ولإشتقاق دالة الكلفة الكلية المقدّرة للأجل الطويل بدلالةالانتاج نتبع الخطوات الأتية:

– تحويل الدالة الى دالة ضمنية بشكل :

$$V = SRTC - 477.402Q + 6.095Q^2 - 12.566Q^3 + 158.984AQ - 72.070A^2 = 0$$

– أخذ المشتقة الأولى للدالة الضمنية بدلالة المساحة (A) ومساواتها بالصفر:

$$dv / dA = 158.984Q - 144.14A = 0$$

$$A = 158.984Q / 144.14$$

$$A = 1.10Q \text{ ----------(2)}$$

– وعند تعويض قيمة (A) بما يساويها في الدالة الاصلية نحصل على دالة الكلفة في الاجل الطويل المدى وكما يأتي :–

$$LRTC = 477.402Q - 6.095Q^2 + 12.566Q^3 - 158.984Q(1.10Q) + 72.070(1.10Q)^2$$

$$= 477.402Q - 6.095Q^2 + 12.566Q^3 - 174.882Q^2 + 87.204Q^2$$

وبجمع حدود Q^2 نحصل على دالة الكلفة الكلية في الاجل الطويل .

$$LRTC = 477.402Q - 93.773Q^2 + 12.566Q^3 \quad \text{.....(3)}$$

حجم الانتاج الامثل والمساحة المثلى:

لاجل حساب اقتصاديات الحجم في انتاج محصول القطن لابد اولاً من ايجاد معادلة متوسط الكلفة الكلية للاجل الطويل **LRATC** إذ إن جميع تكاليف الانتاج

تعتبر تكاليف متغيرة في الاجل الطويل، فقد تم اشتقاق معادلة متوسط الكلفة من معادلة الكلفة الكلية بقسمتها على الناتج (**Q**):

$$LRATC = \frac{LRTC}{Q} = 477.402 - 93.773Q + 12.566Q^2$$

ولتحديد الحجم الامثل للانتاج الذي يدني التكاليف فلا بد من تطبيق الشرط الضروري لتدنية التكاليف وذلك بأخذ المشتقة الجزئية لها نسبة الى Q ومساواتها بالصفر فنحصل على:

$$d(LRATC)/dQ = -93.773 + 25.132Q = 0$$

$$Q = 93.773/25.132 = 3.734 \text{ طن زهر} \qquad \text{(الحجم الامثل للانتاج)}$$

كمية الانتاج الامثل وهي تلك الكمية التي يتحقق عندها اخفض متوسط كلفة بعيدة المدى وفي الوقت نفسه يتحقق احسن دخل صافي ممكن (ربح اعتيادي) .

وبتعويض قيمة **Q** في المعادلة (2) نحصل على:

$$A = 1.10(Q) = 1.10(3.734) = 4.104 \text{ دونم}$$

وهي المساحة المثلى التي يمكن زراعتها من قبل مزارعي محصول القطن للوصول على الحجم الامثل للانتاج الذي يدني متوسط الكلفة بعيدة المدى ويحقق احسن دخل صافي للمدى الطويل (ربح اعتيادي).

المصادر

1–عبد الغني ، محبوب عادل. أصول الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق. الطبعة الاولى. شركة الاعتدال. بغداد. العراق.

2–الجو مرد ، أثير عبد الجبار. مقدمة في الرياضيات الاقتصادية. مديرية دار الكتب للطباعة . جامعة الموصل.

3–النجفي ، سالم توفيق. اقتصاديات الإنتاج الزراعي. جامعة الموصل .

4-Ghebremariam , W.K., G. Fortmann and IVN Sahlai . 2006. A production function analysis of commercial dairy farms in the high lands of Eritrea using ridge regression. A grekou , vol. 45 , No. 2. .

5-Salois , J. Matthew , G. Livauis and C.B. Moss. 2006. Estimation of production functions using Average Data. Southern Agricultural Economics Association Annual Meetings. Orlando , Florida.